

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от "30" ноября 2023 г. №13

Рабочая программа дисциплины
Математические основания теории вероятностей и
математической статистики

Уровень высшего образования
Подготовка научных и научно-педагогических кадров

Программа аспирантуры
Теория вероятностей и математическая статистика

Научная специальность
1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

Форма обучения
Очная

Нижний Новгород
2023 год

1. Место и цель дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Математические основания теории вероятностей и математической статистики» относится к числу обязательных, дисциплин образовательного компонента программы аспирантуры и изучается на 3 году обучения в 5 и 6 семестрах.

Цель дисциплины – изучение математических основ теории вероятностей и случайных процессов, математической статистике на уровне, достаточном для проведения научных исследований и для чтения современной научной литературы. Также цель изучения данной дисциплины заключена в подготовке к сдаче кандидатского экзамена по специальности 01.01.04 Теория вероятностей и математическая статистика.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Выпускник, освоивший программу, должен

Знать:

- примеры типовых вероятностных пространств, аксиоматику Колмогорова,
- применение интеграла Лебега, примеры и свойства некоторых функциональных пространств в мерой,
- основные классы случайных процессов с дискретным и непрерывным временем,
- фундаментальные понятия математической статистики

Уметь:

- проводить доказательства основных утверждений на высоком теоретическом уровне

Владеть:

- навыками критического анализа современных передовых публикаций по специальности

3. Структура и содержание дисциплины.

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 з.е., всего – 108 часов, из которых 72 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа - 72 часа), 36 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

Таблица 2

Структура дисциплины

Наименование раздела дисциплины	Всего, часов	В том числе					Самостоятельная работа обучающегося, часов
		Контактная работа, часов					
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации	Всего	
Вероятностные меры		16					
Случайные величины и распределения в R^n		10					
Последовательности случайных величин		10					
Промежуточная аттестация в 5 семестре - зачет							
Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах		8					8
Некоторые виды зависимости		8					8
Стохастическое исчисление и диффузионные процессы		6					6
Элементы математической статистики		14					14

Промежуточная аттестация в 6 семестре: – экзамен	
--------------------------------------------------	--

Итого		72				36
-------	--	----	--	--	--	----

Таблица 3

Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Форма проведения занятия	Форма текущего контроля*
1.	Вероятностные меры	Алгебры и сигма-алгебры. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова. Теорема Каратеодори о продолжении мер. Примеры наиболее важных для теории вероятностей измеримых пространств R^1, R^n, R^∞, R^T . Построение вероятностной меры в R^∞ . Теорема Колмогорова. Измеримые функции. Определение интеграла Лебега. Производная Радона—Никодима. Произведения мер. Теорема Фубини. Пространства L_1 и L_2 и их характеристики. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.	лекции	Собеседование
2.	Случайные величины и распределения в R^n	Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Теорема непрерывности. Центральная предельная теорема. Теорема Берри-Эссеена.	лекции	Собеседование
3.	Последовательности случайных величин	Закон нуля или единицы. Усиленный закон больших чисел. Закон повторного логарифма. Стационарность, эргодичность, теорема Биркгофа—Хинчина.	лекции	Собеседование
4	Случайные процессы. Распределения функциональных пространств	Непрерывность и дифференцируемость случайной функции. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства.	лекции	Собеседование
5.	Некоторые виды зависимости	Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда. Теоремы о сходимости мартингалов. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.	лекции	Собеседование

		Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, скачкообразные процессы. Марковские процессы и уравнения Колмогорова.		
6.	Стохастическое исчисление и диффузионные процессы	Стохастический интеграл. Формула Ито. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.	лекции	Собеседование
7.	Элементы математической статистики	Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий факторизации. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства. Теорема Рао—Блекуэлла—Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао—Крамера. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана—Пирсона	лекции	Собеседование

4. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающегося состоит в изучении конспектов лекций и основной литературы из списка для подготовки к кандидатскому экзамену по специальности. Вопросы для самоконтроля совпадают с экзаменационными вопросами.

5. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

5.1. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

При выполнении всех работ учитываются следующие **основные критерии**:

- уровень теоретических знаний (подразумевается не только формальное воспроизведение информации, но и понимание предмета, которое подтверждается правильными ответами на дополнительные, уточняющие вопросы, заданные членами комиссии);
- умение использовать теоретические знания при анализе конкретных проблем, ситуаций;
- качество изложения материала, то есть обоснованность, четкость, логичность ответа, а также его полнота (то есть содержательность, не исключающая сжатости);
- способность устанавливать внутри- и межпредметные связи,
- оригинальность мышления, знакомство с дополнительной литературой и другие факторы.

Описание шкалы оценивания на промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка *отлично* – исчерпывающее владение программным материалом, понимание сущности рассматриваемых процессов и явлений, твердое знание основных положений дисциплины, умение применять концептуальный аппарат при анализе актуальных проблем. Логически последовательные, содержательные, конкретные ответы на все вопросы.

Оценка *хорошо* – достаточно полные знания программного материала, правильное понимание сути вопросов, знание определений, умение формулировать тезисы и аргументы. Ответы последовательные и в целом правильные, хотя допускаются неточности, поверхностное знакомство с отдельными теориями и фактами, достаточно формальное отношение к рекомендованным для подготовки материалам.

Оценка *удовлетворительно* – фрагментарные знания, расплывчатые представления о предмете. Ответ содержит как правильные утверждения, так и ошибки, возможно, грубые. Испытуемый плохо ориентируется в учебном материале, не может устранить неточности в своем ответе даже после наводящих вопросов.

Оценка *неудовлетворительно* – отсутствие ответа хотя бы на один из основных вопросов, либо грубые ошибки в ответах, полное непонимание смысла проблем, не достаточно полное владение терминологией.

5.2. Примеры типовых контрольных заданий или иных материалов, используемых для оценивания результатов обучения по дисциплине

Вопросы для экзамена (кандидатского)

1. Аксиоматика Колмогорова. Теорема Каратеодори о продолжении мер. Построение вероятностных мер на типовых измеримых пространствах R^1, R^n, R^∞
2. Измеримые функции. Определение интеграла Лебега. Производная Радона–Никодима. Произведения мер. Теорема Фубини
3. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания
4. Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Теорема непрерывности.
5. Центральная предельная теорема. Теорема Берри–Эссеена.
6. Закон нуля или единицы. Усиленный закон больших чисел.
7. Пространства L_1 и L_2 и их характеристики. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин.
8. Стационарность, эргодичность, теорема Биркгофа—Хинчина
9. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
10. Марковские процессы и уравнения Колмогорова. Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы.
11. Счетные цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
12. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства.
13. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции.
14. Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда. Теоремы о сходимости мартингалов.
15. Стохастический интеграл. Формула Ито. Его свойства

16. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.
17. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Примеры.
18. Критерий факторизации для функции правдоподобия. Примеры.
19. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства.
20. Теорема Рао–Блекуэлл–Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки.
21. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао–Крамера.
22. Метод максимального правдоподобия. Примеры.
23. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия. Примеры
24. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана— Пирсона

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

а) Основная литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.:Наука, 1986. – 431 с. (85 экз.)
2. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, – 1989. – 640 с. (92 экз.)
3. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с. (2 экз.)
4. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 320 с. (15 экз.)
5. Боровков А.А. Математическая статистика. – СПб: Лань, 2010. – 704 с.
Электронная версия: URL: <https://e.lanbook.com/book/3810>
6. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с. (19 экз.)

б) Дополнительная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 2006. – 572 с. (46 экз.)
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 527 с. (14 экз.)
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. – М.: Мир 1984. – 751 с. (15 экз.)
4. Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1967. – 495 с. (2 экз.)
5. Энциклопедия «Вероятность и математическая статистика» / Под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Российская энциклопедия, 1999. – 910 с. (3 экз.)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;
- материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование;

- лицензионное программное обеспечение: *Windows, Microsoft Office*;
 - обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.
- ресурсам.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 № 2122), Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Приказ Минобрнауки РФ от 20.10.2021 № 951).

Авторы:

Авторы: профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных Зорин А.В.,
профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных Федоткин М.А.

Рецензент(ы) _____

Заведующий кафедрой _____

Программа одобрена на заседании методической комиссии Института информационных технологий, математики и механики _____.