

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Колебания и теория устойчивости

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование и вычислительная математика

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.06 Колебания и теория устойчивости относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-6: Способен изучать и применять программное обеспечение, проводить расчётные работы и выполнять обработку результатов исследований	<p>ПК-6.1: Знает методы применения современных программных комплексов, пакетов прикладных программ и автоматизированных систем для решения прикладных задач при проведении исследований</p> <p>ПК-6.2: Умеет самостоятельно проводить расчётные работы, выбирать и применять современные программные комплексы, пакеты прикладных программ и автоматизированные системы, обрабатывать и анализировать полученные результаты</p> <p>ПК-6.3: Имеет практический опыт применения современного программного обеспечения для решения прикладных задач</p>	<p>ПК-6.1: Знать основные понятия теории управления, современные методы исследования в области решения задач теории управления.</p> <p>ПК-6.2: Уметь осуществлять анализ и выбор методов решения современных прикладных задач управления движением.</p> <p>ПК-6.3: Владеть опытом применения базовых знаний и современного математического аппарата управления движением при решении прикладных задач.</p>	Контрольная работа	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	

<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>22</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Динамические системы. Фазовая плоскость.	3	2	0	2	1
Тема 2. Состояния равновесия. Определения устойчивости. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.	5	2	1	3	2
Тема 3. Типы простых состояний равновесия динамических систем 2-го порядка. Диаграмма Сигма-Дельта.	4	2	1	3	1
Тема 4. Типы простых состояний равновесия динамических систем 3-го порядка. Диаграмма в пространстве параметров.	4	2	1	3	1
Тема 5. Критерии устойчивости Рауса-Гурвица, Лъенара-Шипара, Эрмита-Гурвица.	4	2	1	3	1
Тема 6. Робастная устойчивость.	4	2	1	3	1
Тема 7. Метод D-разбиений по одному комплексному параметру.	5	2	1	3	2
Тема 8. Метод D-разбиений по двум действительным параметрам.	5	2	1	3	2
Тема 9. Второй (прямой) метод Ляпунова. Теоремы Ляпунова прямого метода.	5	2	1	3	2
Тема 10. Область притяжения устойчивого состояния равновесия.	4	2	1	3	1
Тема 11. Теорема Барбашина- Красовского.	4	2	1	3	1
Тема 12. Теоремы о неустойчивости состояний равновесия. Теорема Четаева.	4	2	1	3	1
Тема 13. Динамические системы 1-го порядка (с полустепенью свободы).	4	2	1	3	1
Тема 14. Консервативные системы.	4	2	1	3	1
Тема 15. Автоколебательные системы.	5	2	1	3	2
Тема 16. «Быстрые» и «медленные» движения. Разрывные колебания и автоколебания.	6	2	2	4	2
Аттестация	36				
КСР	2			2	

Итого	108	32	16	50	22
-------	-----	----	----	----	----

### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Динамические системы и их классификация. Типы колебаний. Фазовая плоскость. Фазовая траектория. Примеры.

Тема 2. Состояния равновесия. Определения устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, асимптотическая устойчивость в малом, в большом, в целом. Предельная ограниченность систем. Устойчивость по первому приближению. Теоремы Ляпунова. Примеры.

Тема 3. Типы состояний равновесия динамических систем 2-го порядка. Диаграмма Сигма-Дельта на плоскости параметров. Бифуркационные и небифуркационные границы.

Тема 4. Типы простых состояний равновесия динамических систем 3-го порядка. Диаграмма в пространстве параметров.

Тема 5. Критерии устойчивости Рауса-Гурвица, Лъенара-Шипара, Эрмита-Гурвица. Построение областей устойчивости.

Тема 6. Робастная устойчивость. Теорема Харитонова.

Тема 7. Метод D-разбиений по одному комплексному параметру. Примеры.

Тема 8. Метод D-разбиений по двум действительным параметрам. Примеры.

Тема 9. Второй (прямой) метод Ляпунова. Знакоопределенные, знакопостоянные, знакопеременные функции. Теоремы Ляпунова (прямого метода) об устойчивости и асимптотической устойчивости состояний равновесия. Геометрический смысл теорем.

Тема 10. Область притяжения устойчивого состояния равновесия. Оценка области притяжения с помощью прямого метода Ляпунова.

Тема 11. Теорема Барбашина- Красовского. Примеры.

Тема 12. Теоремы о неустойчивости состояний равновесия. Теорема Четаева. Примеры.

Тема 13. Динамические системы 1-го порядка (с полустепенью свободы). Исследование устойчивости состояний равновесия систем с полустепенью свободы.

Тема 14. Консервативные системы. Исследование устойчивости состояний равновесия консервативных систем. Построение фазовых портретов консервативных систем по графику потенциальной энергии.

Тема 15. Автоколебательные системы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий Дюлака и Бендиксона. Индексы особых точек.

Тема 16. «Быстрые» и «медленные» движения. Подсистема быстрых и подсистема медленных движений. Графическое представление «быстрых» и «медленных» движений. Разрывные колебания и автоколебания.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному

преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),

- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

**Задача 1.** Вычислите индексы особых точек, представленных на рисунках.

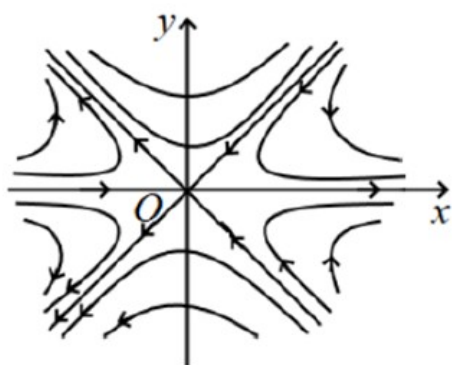


Рис. а

**Задача 2.** Выясните, являются ли следующие системы автоколебательными?

а.  $\dot{x} = -2xy, \dot{y} = 1 + y - x^2 + y^2$

**Задача 3.** Исследовать поведение фазовых траекторий систем, используя качественные методы. Построить фазовый портрет.

а.  $\ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0.$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

			недочетами				
--	--	--	------------	--	--	--	--

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-6**

**Задача 1.** С помощью теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия.

**а.**  $\dot{x} = 3xy - x + 2y + \sin^2 x$ ,  $\dot{y} = 5x^4 - 3y^3 + y^2 + 2x - 3y$ .

**б.**  $\dot{x} = x^3 + y^2 - 3x$ ,  $\dot{y} = 5x^2 - x + 3y + 1 - e^{x^2}$ .

**Задача 2.** Найти значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых асимптотически устойчиво нулевое решение следующих систем.

**а.**  $\dot{x} = ax - 2y + x^2 e^{y^2}$ ,  $\dot{y} = x + y + \sin bxy$ .

**Задача 3.** Для данных систем найти все состояния равновесия и исследовать их устойчивость.

а.  $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 2x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 8$ .

**Задача 4.** По характеристическому уравнению  $D(\lambda) = 0$  определить устойчивость состояния равновесия.

а.  $D(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 6$ .

б.  $D(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$ .

**Задача 5.** В следующих задачах исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия, пользуясь условиями Рауса–Гурвица или Ляпунова–Шипара

а.  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ .

б.  $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$ .

**Задача 6.** Исследовать, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  нулевое решение асимптотически устойчиво.

а.  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = z$ ,  $\dot{z} = -az - by - 2x$ .

**Задача 7.** Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия систем, используя прямой метод Ляпунова:

а.  $\dot{x} = y + x(\alpha + y)(x^2 + y^2 - \beta)$ ,  $\dot{y} = -x + (\alpha y - x^2)(x^2 + y^2 - \beta)$ ,

$\beta > 0$ ;

б.  $\dot{x} = -y + \alpha(ax^2 + by^2)x$ ,  $\dot{y} = x + \alpha(ax^2 + by^2)y$ ,

$a > 0, b > 0, \alpha > 0$ ;

**Задача 8.** Будут ли состояния равновесия  $x = 0, y = 0$ , приведенные на рисунках, устойчивыми? Асимптотически устойчивыми?

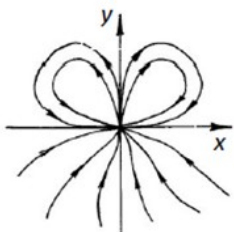


Рис. а

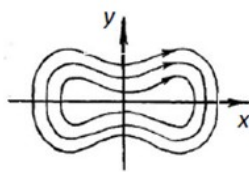


Рис. б

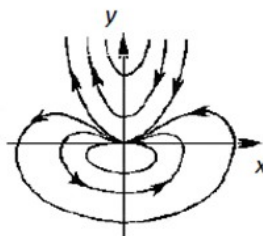


Рис. в

**Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

1. Динамические системы. Типы колебаний. Фазовая плоскость.
2. Состояния равновесия. Определения устойчивости. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
3. Типы простых состояний равновесия динамических систем 2-го и 3-го порядка. Диаграмма Сигма-Дельта.
4. Типы простых состояний равновесия динамических систем 3-го порядка. Диаграмма в пространстве параметров.
5. Критерии устойчивости Рауса-Гурвица, Лъенара-Шипара, Эрмита-Гурвица.
6. Метод D-разбиений по одному комплексному параметру.
7. Метод D-разбиений по двум действительным параметрам.
8. Второй (прямой) метод Ляпунова. Теоремы Ляпунова прямого метода.
9. Теорема Барбашина- Красовского.
10. Теоремы Ляпунова о неустойчивости состояний равновесия. Теорема Четаева.
11. Динамические системы 1-го порядка (с полустепенью свободы).

12. Индексы особых точек и замкнутые фазовые траектории. Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий Дюлака и Бендиксона.

13. Автоколебательные системы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий Дюлака и Бендиксона.

14. Консервативные системы в механике. Построение фазовых портретов консервативных систем по графику потенциальной энергии.

15. «Быстрые» и «медленные» движения. Разрывные колебания и автоколебания.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Неймарк Юрий Исаакович. Динамические модели теории управления. - М. : Наука, 1985. - 400 с. : ил. - 3.80., 57 экз.

2. Болтянский Владимир Григорьевич. Математические методы оптимального управления. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1969. - 408 с. : с черт. - 1.45., 30 экз.

Дополнительная литература:

1. Неймарк Юрий Исаакович. Математическое моделирование как наука и искусство : учебник / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Изд. 2-е, испр. и доп. - Н.

Новгород : Изд-во ННГУ, 2010. - ISBN 978-5-91326-145-8 : 415.01., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/control.htm>

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/asymptotic.htm>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Февральских Любовь Николаевна, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.