

НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«14» декабря 2021 г. № 4

**Рабочая программа дисциплины**

Алгебра

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Направление подготовки / специальность

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

Форма обучения  
Очная

Нижегород

2022 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.0.08, «Алгебра», относится к обязательной части ООП направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>УК-1</b>  Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>УК-1.1.</b> Знать методы поиска, критического анализа и синтеза информации, основы системного подхода для решения поставленных задач.	Знать основные подходы и методы изучения алгебраических структур.	Собеседование
	<b>УК-1.2</b> Уметь осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	Уметь работать с литературой по алгебре для применения системного подхода для решения поставленных задач.	Разноуровневые задачи и задания
	<b>УК-1.3</b> Владеть основами критического анализа и синтеза информации,	Владеть умением критического подхода анализируемой информации.	Контрольная работа

	<i>системного подхода для решения поставленных задач.</i>		
<b>ОПК-1.</b>  Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	<b>ОПК-1.1.</b> Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать об основных теоремах и разделах курса, их месте в научно-исследовательской и педагогической деятельности, в том числе базовые понятия, методы и строгие доказательства фактов разделов дисциплины «Алгебра». На основе вышеперечисленного понимать методы решения задач из различных разделов математических и естественных наук.	Собеседование
	<b>ОПК-1.2.</b> Умеет решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук	Уметь применять теоретические знания для решения типовых задач изучения различных алгебраических структур.	Разноуровневые задачи и задания
	<b>ОПК-1.3.</b> Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	Владеть техникой доказательства математических утверждений и различными методами и способами отыскания решений стандартных задач алгебры.	Контрольная работа

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>16 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>576</b>
<b>в том числе</b>	

аудиторные занятия (контактная работа)	262
Самостоятельная работа	206
Контроль	108
Промежуточная аттестация –	Экзамен 1,2,3 сем.

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Семестр 1						
Поле комплексных чисел и алгебраические системы. Основные определения, утверждения и примеры групп, колец, полей. Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, операции. Степень и извлечение корня из комплексного числа. Группа корней из единицы.	40	10	10		20	20
Теория определителей. Перестановки и подстановки. Группа подстановок. Определители n-го порядка и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Правило Крамера.	43	9	9		18	25
Алгебра матриц. Сложение матриц, умножение матриц на число, умножение матриц, обратная матрица.	33	8	7		15	18
Системы линейных алгебраических уравнений. Метод последовательного исключения неизвестных для систем линейных алгебраических уравнений. n-мерное арифметическое пространство. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Однородные системы. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной системы и присоединенной однородной системы.	42	10	10		20	22

<b>Кольцо многочленов.</b> Определение кольца многочленов. Делимость в кольце многочленов. Факториальность кольца многочленов над полем. Корни многочленов. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Многочлены с действительными коэффициентами. Локализация корней: теорема Штурма.	46	11	12		23	23
<b>Семестр 2</b>						
<b>Векторное (линейное) пространство.</b> Линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Координаты, матрица перехода от одного базиса к другому.	30	8	8		16	14
<b>Линейные отображения (операторы),</b> действия с ними, их матрицы. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения. Инвариантные подпространства. Собственные числа и векторы. Характеристический и минимальный многочлен оператора (матрицы). Жорданова форма линейного оператора (матрицы).	30	12	12		24	6
<b>Билинейные (полуторалинейные) и квадратичные формы.</b> Изменение матрицы квадратичной (полуторалинейной) функции при изменении базиса. Методы Лагранжа и Якоби приведения симметричной (эрмитовой) билинейной формы к каноническому виду. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы.	18	6	6		12	6
<b>Евклидово (унитарное) пространство.</b> Скалярное произведение, свойства. Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства.	19	6	6		12	7
<b>Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств.</b> Соответствие между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор. Свойства. Матрица сопряженного оператора. Инвариантные подпространства относительно сопряженного. Самосопряженные (эрмитовы) операторы и их свойства. Спектр самосопряженного оператора. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пары форм. Ортогональные (унитарные) операторы, их свойства, эквивалентные определения. Матрица ортогонального оператора, свойства собственных чисел и собственных векторов	29	10	10		20	9

ортогонального оператора. Канонический вид ортогонального (унитарного) оператора.						
<b>Тензоры.</b> Сопряженное векторное пространство, двойственный базис. Определение тензора, координаты тензора. Операции над тензорами.	22	6	6		12	10
<b>Семестр 3</b>						
<b>Группы.</b> Определение группы, подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Гомоморфизмы групп. Ядро, образ гомоморфизма. Смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах групп.	20	6	6		12	8
<b>Действие группы на множестве.</b> Орбиты, стабилизаторы. Формула длины орбиты. Формула разложения на орбиты. Классы сопряженных элементов, формула классов. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Центр группы.	18	6	6		12	6
<b>p-группы, разрешимые и простые группы.</b> p-группы. Теоремы Силова. Группы порядка $p^q$ . Коммутант группы. Разрешимые и простые группы.	20	6	6		12	8
<b>Задание группы образующими и соотношениями.</b> Внешнее, внутреннее прямое произведение групп. Разложимые группы. Разложимость конечной циклической группы. Свободные группы. Универсальное свойство свободной группы. Задание группы образующими и соотношениями.	21	6	6		12	9
<b>Конечные и конечнопорожденные абелевы группы.</b> Конечные абелевы группы. Примарные группы. Элементарные делители примарной группы. Число неизоморфных примарных групп порядка $p^n$ . Коэффициенты кручения конечной абелевой группы. Конечнопорожденные абелевы группы. Свободные абелевы группы. Ранг свободной абелевой группы. Подгруппа кручения. Коэффициенты кручения конечнопорожденной абелевой группы.	28	8	8		16	12
Текущий контроль (КСРИФ)	6					
Промежуточная аттестация - экзамен	108					
<b>Итого</b>	<b>576</b>	<b>128</b>	<b>128</b>		<b>256</b>	<b>206</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в форме экзамена.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.  
Изучение литературы и проработка теоретического материала лекционных занятий.  
Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Кострикин А. И., Манин Ю. И. - Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие для студентов мех.-мат. Специальностей вузов., 1980, 1986, 2005, 2008 (В библиотеке ННГУ более 50 экз.)
2. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Хорева Н.А., Чебочко Н.Г "ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ I.". Практикум. 2010, ФЭОР. – URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/teor\\_gr.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/teor_gr.pdf)
3. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Чебочко Н.Г. Задачи по теории групп. Ч. II. Практикум. 2015. ФЭОР. – URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/mulyar.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/mulyar.pdf)
4. Кузнецов М.И. "ЗАДАНИЕ ГРУПП ОБРАЗУЮЩИМИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ". Учебно-методическое пособие. 2014 ФЭОР. – URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/generators.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/generators.pdf).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи .	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи.

	вследствие отказа обучающегося от ответа	умения.  Имели место грубые ошибки.	негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки  при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не



не зачтено		сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

### 5.2.1 Вопросы к экзамену

вопросы	Код формируемой компетенции
<b>Семестр 1</b>	
1. Системы линейных уравнений. Эквивалентные системы, свойства. Теорема об элементарных преобразованиях.	УК-1, ОПК-1
2. Приведение системы к ступенчатому виду.	УК-1, ОПК-1
3. Теоремы о совместности и определенности систем линейных уравнений. Следствия.	УК-1, ОПК-1
4. Определители второго и третьего порядков. Вывод правила Крамера для систем из 2-х уравнений с двумя неизвестными.	УК-1, ОПК-1
5. Перестановки, транспозиции символов в перестановке. Теорема о расположении перестановок в ряд. Следствие.	УК-1, ОПК-1
6. Порядки, инверсии, четность перестановки. Теорема перемены четности на противоположную при транспозиции. Следствие.	УК-1, ОПК-1
7. Подстановки. Четность подстановки. Произведение подстановок. Свойства произведения.	УК-1, ОПК-1
8. Транспозиции, свойства. Теорема о разложении подстановки в произведение транспозиций. Следствия.	УК-1, ОПК-1
9. Циклы, свойства. Разложение подстановки в произведение циклов. Теорема о декременте.	УК-1, ОПК-1
10. Определители и их свойства.	УК-1, ОПК-1
11. Миноры и алгебраические дополнения. Лемма произведении минора на его алгебраическое дополнение.	УК-1, ОПК-1
12. Теорема Лапласа. Следствия.	УК-1, ОПК-1
13. Умножение элементов строки (столбца) на свои и чужие алгебраические дополнения.	УК-1, ОПК-1
14. Правило Крамера для системы из $n$ уравнений с $n$ неизвестными	УК-1, ОПК-1
15. Линейные арифметические пространства. Линейная зависимость. Свойства линейной зависимости независимости. Линейные оболочки. Подпространства.	УК-1, ОПК-1

16. Базисы, эквивалентные определения, стандартный базис в $R^n$ . Лемма о линейно независимой системе, следствие.	УК-1 , ОПК-1
17. Теорема о базисе. Размерность.	УК-1 , ОПК-1
18. Ранг системы векторов. База системы векторов.	УК-1 , ОПК-1
19. Ранг матрицы (горизонтальный, вертикальный, минорный). Теорема о равенстве рангов матрицы и матрицы полученной из данной перестановкой строк (столбцов).	УК-1 , ОПК-1
20. Теорема о равенстве горизонтального, вертикального минорного рангов. Следствия.	УК-1 , ОПК-1
21. Теорема Кронекера-Капелли.	УК-1 , ОПК-1
22. Общий метод исследования совместности и решения системы линейных уравнений. Следствия для однородных систем.	УК-1 , ОПК-1
23. Однородные системы уравнений. Свойства, теорема о фундаментальной системе решений.	УК-1 , ОПК-1
24. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной системы.	УК-1 , ОПК-1
25. Сложение и умножение матриц. Свойства сложения и умножения.	УК-1 , ОПК-1
26. Определитель произведения матриц.	УК-1 , ОПК-1
27. Ранг произведения матриц.	УК-1 , ОПК-1
28. Обратная матрица. Определение, необходимое и достаточное условие существования.	УК-1 , ОПК-1
29. Алгебраические операции. Теорема об обобщенной ассоциативности. Группы, кольца, поля.	УК-1 , ОПК-1
30. Определение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма. Свойства операции сопряжения.	УК-1 , ОПК-1
31. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Свойства модуля.	УК-1 , ОПК-1
32. Свойства степеней. Формула Муавра. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.	УК-1 , ОПК-1
33. Группа корней n-ой степени из единицы.	УК-1 , ОПК-1
34. Первообразные корни.	УК-1 , ОПК-1
35. Делимость целых чисел. Свойства.	УК-1 , ОПК-1
36. НОД и НОК. Свойства. Алгоритм Евклида.	УК-1 , ОПК-1
37. Взаимно простые числа. Свойства, критерий взаимной простоты.	УК-1 , ОПК-1

38. Простые числа и их свойства. Решето Эратосфена. Теорема Евклида.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
39. Основная теорема арифметики, следствия из нее.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
40. Построение кольца многочленов. Степень многочлена, свойства степени. Теорема о целостности кольца многочленов.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
41. Делимость в кольце многочленов. Теорема о делении с остатком. Схема Горнера.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
42. НОД и НОК. Существование НОД. Алгоритм Евклида нахождения НОД.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
43. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты. Свойства.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
44. Неприводимые многочлены.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
45. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых унитарных. Следствия.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
46. Корни многочленов. Теорема Безу.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
47. Кратность корня. Теорема о количестве корней многочлена. Следствия.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
48. Производная многочлена. Критерий кратности корня $\alpha$ . Связь между кратностью корня многочлена и кратностью данного корня в производной.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
49. Алгебраически замкнутое поле, разложение на неприводимые над алгебраически замкнутым полем. Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ , разложение на неприводимые над $\mathbb{R}$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
50. Комплексно сопряженные корни многочлена из $\mathbb{R}[x]$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
51. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ . Разложение на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
52. Локализация корней. Лемма о модуле старшего члена. Следствия. Системы Штурма. Теорема Штурма. Теорема о существовании системы Штурма	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
<b>Семестр 2</b>	
1. Аксиомы векторного пространства. Следствия из аксиом. Примеры векторных пространств. Подпространства, примеры.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
2. Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
3. Эквивалентные определения базиса, примеры. Конечномерные, бесконечномерные пространства.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
4. Лемма о линейно независимой системе. Теорема о количестве векторов в базисе, размерность.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>

5. Теорема о дополнении до базиса. Свойство бесконечномерных пространств.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
6. Теорема о монотонности размерности.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
7. Координаты вектора в базисе, матрица перехода, ее невырожденность, формула изменения координат при переходе к новому базису.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
8. База системы векторов и ранг системы векторов.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
9. Сумма и пересечение подпространств, линейная оболочка объединения.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
10. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
11. Прямая сумма. Критерий прямой суммы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
12. Линейные отображения векторных пространств, свойства, примеры. Матрица линейного отображения в базисах. Матричная запись. Формула преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
13. Матрица линейного оператора. Матричная запись. Координаты образа вектора. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
14. Теорема о задании линейного отображения на базисе. Теорема о соответствии между линейными отображениями и матрицами.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
15. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
16. Инъективные линейные отображения.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
17. Сумма линейных отображений, произведение на число, композиция. Их матрицы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
18. Обратное отображение, его матрица. Изоморфизм векторных пространств. Теорема об изоморфизме конечномерных векторных пространств.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
19. Алгебра линейных операторов. Эквивалентные условия невырожденности.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
20. След матрицы, след линейного оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
21. Инвариантные подпространства, собственные векторы. Собственные значения линейного оператора и корни характеристического многочлена. Инвариантность характеристического многочлена.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
22. Теорема о линейной независимости собственных векторов.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>

23. Диагонализируемость линейного оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
24. $\lambda$ -матрицы, элементарные преобразования лямбда-матриц, эквивалентные лямбда-матрицы, каноническая форма.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
25. Приведение лямбда-матрицы к каноническому виду элементарными преобразованиями.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
26. Теорема о единственности канонического вида. Следствия. Инвариантные множители.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
27. Унимодулярные лямбда-матрицы. Свойства. Эквивалентность элементарных преобразований лямбда-матриц и умножения на элементарные матрицы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
28. Критерий эквивалентности лямбда -матриц.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
29. Деление с остатком матричных многочленов.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
30. Критерий подобия матриц.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
31. Канонический вид характеристических матриц для жордановых клеток.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
32. Канонический вид характеристических матриц для жордановых матриц. Критерий подобия жордановых матриц.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
33. Приведение матрицы к жордановой нормальной форме. Критерий диагонализируемости.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
34. Жорданова форма матриц 2-го и 3-го порядков.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
35. Подстановка матрицы, оператора в многочлен, аннулирование многочлена, минимальный многочлен, примеры, свойство. Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
36. Билинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
37. Симметрические, кососимметрические формы. Квадратичная форма, поляризация квадратичной формы, канонический вид.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
38. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
39. Ранг квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ . Теорема об эквивалентности квадратичных форм над $\mathbb{C}$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
40. Закон инерции квадратичных форм над $\mathbb{R}$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
41. Сигнатура. Теорема об эквивалентности квадратичных	<i>УК-1 , ОПК-1</i>

форм над $R$ .	
42. Метод Якоби.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
43. Положительно определенные квадратичные формы. Эквивалентные определения. Критерий Сильвестра.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
44. Евклидовы пространства, скалярное произведение, свойства. Длина вектора, неравенство Коши-Буняковского, следствия, угол между векторами.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
45. Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в о.н.б. Матрица Грама.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
46. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
47. Существование о.н.б. Дополнение до о.н.б.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
48. Ортогональное дополнение подпространства. Свойства.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
49. Теорема об ортогональном дополнении, следствие. Ортогональные проекции, расстояния.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
50. Изоморфизм евклидовых пространств.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
51. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
52. Теорема о соответствии между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве. Следствия.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
53. Сопряженный оператор. Свойства. Матрица сопряженного оператора. Инвариантные подпространства относительно сопряженного.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
54. Симметрические операторы и их свойства. Теорема об ортогональности собственных векторов симметрического оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
55. Теорема о спектре симметрического оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
56. Критерий симметрического оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
57. Теорема о диагонализуемости симметричной матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
58. Ортогональные операторы, их свойства, эквивалентные определения.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
59. Матрица ортогонального оператора, свойства собственных чисел и собственных векторов ортогонального оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
60. Лемма о комплексном характеристическом корне ортогонального оператора, следствие.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
61. Теорема об инвариантных подпространствах	<i>УК-1 , ОПК-1</i>

ортогонального оператора.	
62. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
63. Унитарные пространства.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
64. Двойственное пространство. Однозначность определения линейной функции на базисе.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
65. Теорема о двойственном базисе, следствие. Канонический изоморфизм в евклидовом пространстве.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
66. Канонический изоморфизм между пространством и дважды сопряженным.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
67. Матрица перехода в двойственных базисах. Законы изменения координат векторов и ковекторов в тензорных обозначениях.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
68. Тензоры. Координаты тензора. Закон изменения координат тензора.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
69. Операции над тензорами.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
70. Разложимые тензоры. Базис в $T_p^q(V)$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
<b>Семестр 3</b>	
1. Бинарная алгебраическая операция. Примеры. Теорема об обобщенной ассоциативности.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
2. Определение группы, подгруппы. Эквивалентное определение подгруппы. Примеры.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
3. Степени, свойства степеней. Порядок элемента. Свойства порядка.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
4. Циклические группы. Теорема о порядке элемента и циклической подгруппы порожденной этим элементом. Следствия.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
5. Теорема об изоморфизме циклических групп.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
6. Теорема о подгруппах циклической группы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
7. Гомоморфизмы групп. Примеры. Свойства гомоморфизмов групп. Ядро, образ гомоморфизма. Изоморфизм групп.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
8. Смежные классы по подгруппе (левые, правые). Примеры.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
9. Индекс группы по подгруппе. Теорема Лагранжа, следствия.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
10. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Каноническая проекция. Примеры.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
11. Основная теорема о гомоморфизме. Следствие.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>

12. 1-ая теорема об изоморфизме.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
13. Теорема о соответствии. Следствия.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
14. Действие групп на множестве. Примеры. Эквивалентность определений действия групп на множестве.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
15. Орбиты, стабилизаторы. Примеры. Сопряженность стабилизаторов элементов из одной орбиты.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
16. Предложение о соответствии между элементами орбиты и множеством левых смежных классов по подгруппе. Формула длины орбиты.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
17. Формула разложения на орбиты. Формула классов.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
18. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Теорема Кэли.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
19. Центр группы. Примеры. Свойства. Теорема о центре $p$ -группы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
20. Порядки элементов в абелевой группе. Лемма о показателе.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
21. Теорема Коши. Силовские подгруппы. Теоремы Силова. Следствие.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
22. Свойства коммутанта. Примеры.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
23. Разрешимые группы. Примеры. Свойства разрешимых групп.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
24. Теорема о разрешимости $p$ -группы. Группа порядка $p^2$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
25. Внешнее, внутреннее прямое произведение. Теорема об эквивалентности определений внутреннего произведения групп.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
26. Теорема о порядке произведения.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
27. Следствие теоремы о порядке произведения. Теорема о разложимости циклической группы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
28. Теорема о разложении группы в прямую сумму силовских нормальных подгрупп.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
29. Теорема о факторгруппе произведения.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
30. Абелевы группы. Примарная подгруппа. Теорема о разложении в прямую сумму примарных подгрупп.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
31. Лемма о представителе. Теорема о разложении примарной группы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
32. Теорема о единственности разложения примарной группы.	<i>УК-1 , ОПК-1</i>
33. Элементарные делители примарной группы. Теорема об изоморфизме примарных групп. Число неизоморфных примарных групп порядка $p^n$ .	<i>УК-1 , ОПК-1</i>



34. Коэффициенты кручения. Основная теорема о конечных абелевых группах.	УК-1, ОПК-1
--------------------------------------------------------------------------	-------------

### 5.2.2. Вопросы для собеседования

Вопросы для оценки компетенции «УК-1», «ОПК-1»:

1. Обобщенный закон ассоциативности.
2. Эквивалентность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях.
3. Приведение системы линейных уравнений (матрицы) к ступенчатому виду.
4. Критерий совместности (несовместности, определенности) системы линейных уравнений по ступенчатому виду.
5. Связь решений неоднородной системы линейных уравнений с решением соответствующей ей однородной.
6. Если система линейных уравнений однородная и число уравнений меньше числа неизвестных, то имеется ненулевое решение.
7. Ассоциативность произведения отображений.
8. Обратное отображение существует тогда и только тогда, когда отображение биективно.
9. Перестановки и подстановки. Произведение подстановок. Циклы.
10. Лемма о списке перестановок. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
11. Разложение подстановок в произведение независимых циклов.
12. Четность подстановок. Четность произведения подстановок.
13. Определитель матрицы порядка  $n$  (определение и базовые свойства).
14. Свойства определителя, вытекающие из базовых свойств. Определитель транспонированной матрицы.
15. Вычисление определителя с помощью приведения его к треугольному виду. Теорема о единственности функции с базовыми свойствами определителя.
16. Разложение определителя по строке (столбцу).
17. Лемма о фальшивом разложении.
18. Теорема Лапласа.
19. Критерий определенности квадратной системы линейных уравнений. Правило Крамера.
20. Линейные преобразования и их свойства.
21. Произведение линейных преобразований, его матрица.
22. Ассоциативность произведения матриц.
23. Операции над матрицами, их свойства.
24. Лемма об определителе с углом нулей.
25. Определитель произведения матриц.
26. Обратная матрица (критерий существования, формула ее элементов, ее определитель).
27. Способы нахождения обратной матрицы.
28. Линейно зависимые и линейно независимые системы в линейном пространстве строк, их свойства.
29. Критерий равенства определителя нулю.
30. Максимальные линейно-независимые подсистемы.
31. Основная теорема о линейной зависимости. Ранг системы векторов.
32. Теорема о ранге матрицы.
33. Теорема о ранге произведения матриц.

34. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определенности системы (в терминах рангов).
35. Ранг системы решений однородной линейной системы уравнений.
36. Построение поля комплексных чисел.
37. Операция комплексного сопряжения.
38. Свойства модуля комплексных чисел.
39. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.
40. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
41. Группа корней  $n$ -ой степени из единицы. Первообразные корни.
42. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и старший член. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над полем.
43. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной.
44. Делимость в кольце многочленов. Свойства делимости.
45. НОД многочленов. Алгоритм Евклида. Выражение НОД через исходные многочлены.
46. Значения и корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера.
47. Производные многочленов. Формула Тейлора.
48. Кратные корни многочленов и производные.
49. Теорема о понижении кратности корня при переходе к производной и ее следствия. Теорема Виета.
50. Многочлены с действительными коэффициентами.
51. Неприводимые многочлены над полем. Свойства неприводимых многочленов. Разложение на неприводимые.
52. Алгоритм Евклида и система многочленов Штурма, ее свойства.
53. Теорема Штурма.

1. Аксиомы линейного пространства. Следствия из аксиом. Подпространства, примеры.
2. Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.
3. Базис линейного пространства. Количество векторов в базисе, размерность.
4. Теорема о дополнении до базиса. Эквивалентные определения базиса.
5. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.
6. Прямая сумма линейных пространств. Критерий прямой суммы.
7. Факторпространства. Размерность факторпространств.
8. Матрица перехода от одного базиса к другому. Координаты, их изменение при замене базиса.
9. Изоморфизм пространств одинаковой размерности.
10. Линейные отображения линейных пространств. Ядро и образ линейного отображения. Размерность ядра и образа.
11. Задание матрицами линейных отображений. Матрица композиции линейных отображений.
12. Закон изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.
13. Алгебра линейных операторов. Матрица линейного оператора. Примеры.
14. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Определитель и след линейного оператора.
15. Критерий невырожденности линейного оператора. Полная линейная группа.
16. Собственные векторы и собственные значения. Теорема о линейной независимости собственных векторов.

17. Собственные значения линейного оператора и корни характеристического многочлена. Инвариантность характеристического многочлена.
18. Критерий диагонализированности линейного оператора.
19.  $\lambda$ -матрицы, элементарные преобразования  $\lambda$ -матриц, эквивалентные  $\lambda$ -матрицы, каноническая форма.
20. Приведение  $\lambda$ -матрицы к каноническому виду элементарными преобразованиями.
21. Теорема о единственности канонического вида. Следствия. Инвариантные множители.
22. Унимодулярные  $\lambda$ -матрицы. Свойства. Эквивалентность элементарных преобразований  $\lambda$ -матриц и умножения на элементарные матрицы.
23. Критерий эквивалентности  $\lambda$ -матриц.
24. Матричные многочлены. Деление с остатком матричных многочленов.
25. Критерий подобия числовых матриц.
26. Канонический вид характеристических матриц для жордановых клеток.
27. Критерий подобия жордановых матриц.
28. Приведение матрицы к жордановой нормальной форме. Критерий диагонализированности.
29. Подстановка матрицы оператора в многочлен, аннулирование многочлена, минимальный многочлен. Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли.
30. Билинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.
31. Полуторалинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица полуторалинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.
32. Симметрические, кососимметрические формы. Квадратичная форма, поляризация квадратичной формы, канонический вид.
33. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
34. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.
35. Закон инерции квадратичных форм над  $\mathbb{R}$ .
36. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
37. Евклидовы и унитарные пространства – определения и примеры.
38. Разложение вектора евклидоваго и унитарного пространств на ортогональную проекцию и ортогональную составляющие. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника.
39. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.
40. Ортогональное дополнение подпространства.
41. Изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств.
42. Теорема о соответствии между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом (унитарном) пространстве.
43. Сопряженный оператор. Пример. Матрица сопряженного оператора.
44. Эрмитовы операторы и их свойства.
45. Диагонализированность эрмитового оператора.
46. Приведение квадратичной формы унитарного пространства к главным осям.
47. Теорема о существовании в евклидовом пространстве нетривиальных  $\phi$ -инвариантных подпространств линейного оператора  $\phi$ .
48. Симметрические операторы и их свойства.
49. Диагонализированность симметрического оператора.
50. Приведение квадратичной формы евклидоваго пространства к главным осям.
51. Ортогональные и унитарные операторы, эквивалентные определения.

52. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Лемма об инвариантности ортогонального дополнения относительно ортогонального (унитарного) оператора. Теорема о каноническом виде унитарного оператора.
53. Канонический вид ортогонального оператора. Примеры.
54. Ортогональные и унитарные группы операторов и матриц.

1. Группа – определение и простейшие свойства. Примеры.
2. Подгруппы. Примеры. Пересечение подгрупп.
3. Порядок элемента группы. Порядок степени элемента группы.
4. Циклические группы, примеры.
5. Подгруппы циклической группы.
6. Смежные классы по подгруппе. Теорема о разбиении группы на смежные классы.
7. Теорема Лагранжа и ее следствия. Классификация групп порядка  $< 6$ .
8. Теорема Коши.
9. Нормальные подгруппы. Критерий нормальности подгруппы.
10. Центр группы. Центризатор элемента группы.
11. Гомоморфизмы групп и их свойства.
12. Классификация циклических групп.
13. Теорема Кэли.
14. Факторгруппа по нормальной подгруппе. Канонический гомоморфизм на факторгруппу.
15. Первая теорема о гомоморфизме.
16. Вторая теорема о гомоморфизме.
17. Третья теорема о гомоморфизме.
18. Прямые суммы абелевых групп.
19. Периодическая часть абелевой группы.
20. Теорема о разложении периодической абелевой группы в прямую сумму примарных компонент.
21. Лемма о выделении циклического прямого слагаемого максимального порядка в конечной абелевой  $p$ -группе.
22. Структурная теорема для конечных абелевых  $p$ -групп.
23. Свободные абелевы группы. Единственность ранга свободной абелевой группы. Прямые суммы свободных абелевых групп.
24. Теорема о свободе конечнопорожденной абелевой группы без кручения.
25. Универсальное и накрывающее свойства свободных абелевых групп конечного ранга.
26. Лемма о ретракте абелевых групп.
27. Расщепляющее свойство свободной абелевой группы конечного ранга.
28. Ненулевая подгруппа свободной абелевой группы конечного ранга свободна.
29. Структурная теорема для конечнопорожденных абелевых групп.
30. Действие групп на множестве. Примеры. Эквивалентность определений действия группы на множестве.
31. Орбиты и стабилизаторы. Теорема о соответствии между элементами орбиты и множеством левых смежных классов по стабилизаторам этих элементов. Формула длины орбиты.
32. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Теорема Кэли.
33. Первая теорема Силова.
34. Вторая теорема Силова.
35. Третья теорема Силова.
36. Следствия из теорем Силова. Строение групп порядка 15.
37. Свойства коммутанта. Примеры.
38. Разрешимые группы. Свойства разрешимых групп.

39. Разрешимость группы треугольных матриц.
40. Основные свойства групп подстановок. Коммутанты групп подстановок.
41. Простые группы. Примеры. Простота знакопеременной группы.
42. Прямые произведения групп. Примеры.
43. Свободные группы. Задание групп образующими и определяющими соотношениями.

### 5.2.3. Типовые задания для оценки сформированности компетенций УК-1, ОПК-1

#### Семестр 1.

1) Вычислить  $\sqrt[3]{\frac{(1+i)^8(-\sqrt{3}+i)^6}{(-1-i)^3}}$

- 2) Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- 3) Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$$

$$g = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

- 4) Вычислить  $2A^{-1} - BA - 3E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 5) Отделить кратные множители многочлена

$$f = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$$

- 6) Пользуясь схемой Горнера разделить  $f = x^4 + 2ix^3 - x^2 - 3x + 7 + i$  с остатком на  $x+i$  и вычислить  $f(-i)$ .

- 7) Исследовать систему на совместность в зависимости от значения параметра  $\lambda$  и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

- 8) Исследовать систему на совместность в зависимости от значения параметра  $\lambda$  и найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases}$$

9) Разложить многочлен  $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$  по степеням  $x-2$ . Определить кратность корня  $x_0 = 2$ .

10) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

11) Методом Штурма отделить корни полинома

$$f = x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$$

12) Исследовать совместность, найти общее решение и частное решение системы уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 3 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 4 \end{cases}$$

13) Вычислить определитель

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & - & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

14) Вычислить определитель

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & - & - & 4 \\ 4 & 3 & 4 & - & - & 4 \\ 4 & 4 & 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 4 & 4 & 4 & - & - & 3 \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} \end{array}$$

15) Найти общее решение и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

16) Вычислить  $\sqrt[4]{\frac{(1-i)^4(-1+i\sqrt{3})^{12}}{i^{11}}}$

17) Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

18) Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

19) Найти общее решение и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 11x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

20) Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & -11 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

21) Разложить многочлен  $f = x^5 - 1$  на неприводимые множители над  $\mathbb{C}$  и над  $\mathbb{R}$ .

22) Найти максимальную линейно независимую подсистему системы векторов

$$(7, 2, -9, 3, -19)$$

$$(2, 3, -5, 1, -8)$$

$$(3, 1, -4, 5, -12)$$

$$(-2, -1, 3, -2, 7)$$

23) Методом Штурма отделить корни многочлена  $f = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$ .

24) Найти значения многочлена  $f = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$  и всех его производных в точке  $x = -2$ .

25) Найти общее решение и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

26) Решить уравнение  $X \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

## Семестр 2.

1. Найти матрицу перехода от базиса  $v_1=(1, 1, 1)$ ,  $v_2=(1, 1, 0)$ ,  $v_3=(-1, 0, -1)$  к базису  $u_1=(1, 2, 0)$ ,  $u_2=(2, 2, 1)$ ,  $u_3=(2, 1, 2)$ .

2. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

систем векторов  $\langle(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle$  и  $\langle(-1,-1,1,0),(2,2,0,1)\rangle$ .

3. Выяснить является преобразование пространства  $R^3$  линейным и если да, то найти его матрицу в базисе  $e_1=(1,1,1)$ ,  $e_2=(-1,1,1)$ ,  $e_3=(1,2,3)$ :

А)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$ .

Б)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 x_2, x_3)$ .

4. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $v_1=(1, 0, 1)$ ,

$v_2=(0, 1, 1)$ ,  $v_3=(1, 1, 0)$  в векторы  $u_1=(4, 4, 5)$ ,  $u_2=(5, 3, 4)$ ,  $u_3=(3, 5, 3)$ , соответственно.

5. Линейный оператор  $F$  задан в базисе  $\{v_1=(1, 1, 0), v_2=(0, 1, 1), v_3=(1, 0, 1)\}$ :

$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) = 2a_1 v_1 + 2a_2 v_2 - 2a_3 v_3$ , где  $a_1, a_2, a_3$  – координаты вектора в базисе  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

Найти матрицу оператора  $F$  в базисе  $\{u_1, u_2, u_3\}$  и значение оператора  $F$  на векторе  $u = u_1 + 2u_2 + u_3$ , где  $u_1=(1, 1, 1)$ ,  $u_2=(0, 1, 1)$ ,  $u_3=(0, 0, 1)$ .

6. Матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $a_1=(1, 1)$ ,  $a_2=(1, 0)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,

матрица оператора  $\psi$  в базисе  $b_1=(-1, -1)$ ,  $b_2=(1, 2)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу оператора  $\varphi + \psi$  в базисе  $\{b_1, b_2\}$ .

7. Найти базис ядра и образа оператора, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$



8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Является ли диагонализируемым линейный оператор над  $R$ , заданный в стандартном базисе

матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

10. Найти жорданову форму матрицы  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

11. Найти нормальный вид в области вещественных чисел и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

12. Найти канонический вид и ортогональное преобразование, приводящее  $f$  к каноническому виду (приведение к главным осям),

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

13. Процессом ортогонализации Грама-Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов  $u_1 = (1, 2, -1)$ ,  $u_2 = (0, 3, -2)$ ,  $u_3 = (2, 1, 0)$ .

14. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую

вектора  $x=(3,1,2)$  на линейное подпространство  $L$ , натянутое на векторы:

$$v_1=(1, 2, -1), \quad v_2=(2, -2, 1).$$

### Семестр 3.

1. В циклической группе порядка 20 найти все элементы  $a$ , такие что  $a^4 = e$  и все элементы порядка 4.

2. Найти классы сопряженных элементов в группе  $A_4$ .

3. Выяснить какие из перечисленных циклических групп  $\langle a \rangle$ , порожденных элементом  $a \in G$ , изоморфны:

1)  $G = \square^*$ ,  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ;

2)  $G = \square^*$ ,  $a = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$ ;

3)  $G = \square^*$ ,  $a = -3\pi$ ;

4)  $G = \square^*$ ,  $a = 7 - i$ ;

5)  $G = S_6$ ,  $a = (1 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5)$ ;

6)  $G = \mathbb{Z}$ ,  $a = -310$ ;

7)  $G = GL_n(\mathbb{Z})$ ,  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

4. Найти все силовские 3-подгруппы в  $S_4$ .

5. Найти порядок элемента  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$ .

6. Определить является отображение  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  гомоморфизмом групп или нет, найти ядро и образ:

a)  $f(z) = |\bar{z}|^2$ ;

в)  $f(z) = -|z|$ ;

с)  $f(z) = 1$ ;

d)  $f(z) = 3$ .

7. Доказать изоморфизм  $\mathbb{C}^* / \mathbb{C}^+ \cong T^1$ .

8. Найти централизатор подстановки  $(1\ 4\ 2)$  в  $S_4$ .

9. Выяснить является множество с операцией группой или нет.

10. В группе  $GL_2(\mathbb{R})$  найти централизатор матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

11. Найти все гомоморфные отображения  $Z_9 \rightarrow Z_{36}$ .

12. Доказать, что группа  $G = \langle a, b \mid a^8, b^2 a^2, b^{-1} a b a \rangle$  конечна.

13. Доказать, что группу  $S_3$  можно задать следующими образующими и соотношениями:

$\langle a, b \mid a^2, b^3, a^{-1} b a b^{-2} \rangle$ .

14. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.

15. Найти левые и правые смежные классы в  $S_3$  по подгруппе  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

16. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.

17. Изоморфны ли группы:  $Z_{12} \oplus Z_{36}$  и  $Z_{18} \oplus Z_{24}$ ?

18. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.

19. Доказать, что не существует простых групп порядка 80.

20. Найти количество элементов заданного порядка в заданной группе.

21. Найти все орбиты и стабилизаторы группы  $G$ , порожденной подстановкой

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$

и действующей на множестве  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

22. Найти все подгруппы циклической группы порядка 36.

23. Найти нормальные подгруппы в  $S_4$ .

24. Найти порядок элемента  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$ .

25. Доказать изоморфизм  $GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) Основная литература:

1. Кострикин А. И. - Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2004. (В библиотеке ННГУ более 50 экз.)
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2003. (В библиотеке ННГУ более 100 экз.)
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. (В библиотеке ННГУ более 40 экз.)

### б) Дополнительная литература:

1. Ильин В. А., Ким Г. Д. - Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. для студентов ун-тов и техн. вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика и информатика". - М.: Проспект : Изд-во Моск. ун-та, 2012. - 400 с. (В библиотеке ННГУ более 40 экз.)
2. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. (В библиотеке ННГУ более 30 экз.)
3. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. - Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. 2001, 2007, 2008 (В библиотеке ННГУ более 100 экз.)

### в) Интернет-ресурсы

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Алгебра 1 курс (математика, ФММ, МиММ)» <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4485> «Алгебра 2 курс (математика)» <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4486> , созданные в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

<http://www.lib.unn.ru/>

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (3++) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор: к.ф.-м.н., доцент Любимцев О.В.

Рецензент: д.ф.м.н., профессор Золотых Н.Ю.

Заведующий кафедрой АГДМ: д.ф.м.н., профессор Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 1 декабря 2021 года, протокол № 2.