

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол
№13 от 30.11.2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Методы оптимизации

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки
09.03.03 Прикладная информатика

Направленность образовательной программы
Прикладная информатика в области обработки данных

Форма обучения
Очно-заочная

Нижний Новгород
2023

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.12 «Методы оптимизации» относится к обязательной части ООП направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует знание основ высшей математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Знать типовые модели постановки задач оптимизации; основные методы решения экстремальных задач	Собеседование Доклад(сообщение)
	ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования.	Уметь интерпретировать новую информацию в предметной области; ставить и решать прикладные задачи в виде задач оптимизации; выполнять оценку сложности вычислительных алгоритмов.	Задача Контрольная работа
	ОПК-1.3. Демонстрирует наличие практического опыта теоретического и экспериментального исследования объектов	Владеть способностью анализировать возникающие проблемы с точки зрения математических и алгоритмических трудностей Владеть способностью к построению новых или модернизации известных вычислительных алгоритмов применительно к конкретным прикладным задачам	Задача Тест

	профессиональной деятельности.		
ОПК-7. Способен разрабатывать алгоритмы и программы, пригодные для практического применения	ОПК-7.1. Демонстрирует знание основных языков программирования и работы с базами данных, операционных систем и оболочек, современных программных сред разработки информационных систем и технологий.	Знать принцип оптимальности Р.Беллмана, вид рекуррентных уравнений Р.Беллмана; Знать основные понятия и факты из выпуклого анализа; Знать условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера; Знать основные вычислительные методы одномерной и многомерной оптимизации, Знать принцип максимума Л.С. Понтрягина в задачах оптимального управления; Знать уравнение Эйлера для решения задач вариационного исчисления.	Собеседование тест
	ОПК-7.2. Применяет языки программирования и работы с базами данных, современные программные среды разработки информационных систем и технологий для автоматизации бизнес-процессов, решения прикладных задач различных классов, ведения баз данных и информационных хранилищ.	Уметь: выполнять математическую постановку задач оптимизации Уметь. записывать уравнения Беллмана для задач динамического программирования; строить вычислительные схемы решения задач динамического программирования с помощью уравнений Беллмана; находить решения задач математического программирования с использованием условий Каруша-Куна-Таккера; выбирать эффективные вычислительные методы решения нелинейных задач оптимизации различного типа ; применять принцип максимума для аналитического решения простых задач оптимального управления; применять уравнение Эйлера, а также условия трансверсальности для решения задач вариационного исчисления.	Тест Контрольная работа
	ОПК-7.3. Имеет практический опыт программирования, отладки и тестирования прототипов программно-технических комплексов задач.	Владеть терминологией предметной области; Владеть аналитическими и вычислительными методами решения безусловных экстремальных задач; Владеть методами учета ограничений в задачах оптимизации.	Тест Контрольная работа

3. Структура и содержание дисциплины «Методы оптимизации»

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очно-заочная форма
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ

Часов по учебному плану	144
в том числе	
контактная работа:	50
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	58
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины*	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа, часы из них				Самост. работа студента, часы
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Всего	
Раздел 1. Динамическое программирование. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана.	20	6	3	0	9	11
Раздел 2. Элементы выпуклого анализа. Математическое программирование. Теорема Каруша- Куна-Таккера.	25	8	4	0	12	13
Раздел 3. Численные методы безусловной локальной оптимизации. Учет ограничений.	23	8	4	0	12	11
Раздел 4. Оптимальное управление. Принцип максимума Л.С.Понтрягина.	21	6	3	0	9	12
Раздел 5. Вариационное исчисление, уравнение Эйлера, условия трансверсальности .	17	4	2	0	6	11
Текущий контроль	20	6	3	0	9	11
Промежуточная аттестация: экзамен	36					
Итого	144	32	16	0	50	58

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов и тестов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

Краткое содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Введение: постановки задач математического программирования. Динамическое программирование как метод решения задач оптимального управления дискретными процессами. Вывод рекуррентных уравнений Р. Беллмана. Обобщение метода Беллмана на задачи выбора оптимальной стратегии управления марковскими процессами с доходами. Метод итераций Р.Ховарда.

Раздел 2. Элементы выпуклого анализа. Выпуклые множества и выпуклые функции. Теоремы отделимости. Необходимые условия экстремума в гладкой задаче без ограничений (теорема Ферма) и задаче с ограничениями–равенствами (теорема Лагранжа), функция Лагранжа.

Выпуклые задачи математического программирования. Функция Лагранжа. Теорема Каруша-Куна-Таккера в терминах седловой точки функции Лагранжа. Достаточное условие регулярности Слейтера. Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме.

Раздел 3. Численные методы локальной оптимизации. Классификация методов. Методы второго, первого порядков, методы прямого поиска. Одномерная оптимизация. Вывод оптимальных и ε -оптимальных пассивных и последовательных N-шаговых алгоритмов для унимодальной модели функции на отрезке. Метод Фибоначчи. Метод золотого сечения и их взаимосвязь. Методы дихотомии.

Градиентные методы, метод Ньютона, их свойства. Метод прямого поиска Хука–Дживса. Метод деформируемого треугольника. Проблемы многоэкстремальной оптимизации. Класс липшицевых функций и его свойства. Метод Пиявского.

Обзор методов сведения задачи с ограничениями к задачам без ограничений. Метод штрафных функций, его обоснование и свойства.

Раздел 4. Оптимальное управление. Принцип максимума Л.С.Понтрягина.

Раздел 5. Вариационное исчисление, уравнение Эйлера, условия трансверсальности .

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Ниже приводятся виды самостоятельной работы студентов, порядок их выполнения и контроля, приводится учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы по ее отдельным видам и разделам дисциплины.

Виды самостоятельной работы студентов:

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям;
- подготовка к выполнению письменных контрольных работ;
- подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

Проработка теоретического материала лекционных занятий выполняется самостоятельно с использованием лекционных материалов, методических материалов в виде курса лекций «Методы нелинейной оптимизации» (автор: Городецкий С.Ю.) в электронной форме, размещенного на сайте кафедры ТУиДС по адресу: <http://www.itmm.unn.ru/tuds/materials.htm>. Контроль выполняется в форме проведения ежемесячного письменного экспресс-опроса по понятиям, фактам, формулировкам, выполняемого в течение 15 минут на научно-практических занятиях.

Домашние задания выдаются по имеющемуся задачнику [6], который включает краткий теоретический материал и примеры решения задач из каждого раздела:

Проверка выполнения домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия. Используется две формы контроля: – выборочная проверка выполнения заданий у двух-трех человек из группы; – проверка в форме коллективного обсуждения у доски результатов выполнения отдельных заданий одним или двумя студентами.

Для подготовки к контрольным работам рекомендуется повторно прочитать теоретические разделы в задачнике, просмотреть полезные разделы в соответствующих источниках из списка рекомендованной литературы (раздел 7), а также самостоятельно решать несколько задач по теме контрольной работы из указанного задачника.

В качестве методических материалов при подготовке к экзамену рекомендуется использовать собственные конспекты лекций, методические материалы в виде курса лекций

«Методы нелинейной оптимизации» (автор: Городецкий С.Ю.) в электронной форме, размещенного на сайте кафедры ТУиДС по адресу: <http://www.itmm.unn.ru/tuds/materials.htm>, а также источники, рекомендованные в списке литературы раздела 7.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и глобально-оптимального решений.	ОПК-1
2. Метод рекуррентных уравнений Беллмана. Принцип Беллмана как необходимое условие и достаточное условие для задач с аддитивным критерием.	ОПК-7
3. Обобщение уравнений Беллмана на случай марковских процессов с доходами.	ОПК-7
4. Метод итераций Р.Ховарда.	ОПК-7
5. Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции.	ОПК-1
6. Опорная гиперплоскость выпуклого множества, теорема об отделимости двух	ОПК-7

выпуклых множеств.	
7. Свойства выпуклых функций, критерии выпуклости. Задача выпуклого математического программирования и ее свойства.	ОПК-1
8. Градиент и производная по направлению, ее вычисление, свойства градиента. Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма.	ОПК-7
9. Задачи с ограничениями, функция Лагранжа. Запись условий экстремума первого порядка в задачах математического программирования.	ОПК-1
10. Теорема Каруша-Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования в терминах седловой точки функции Лагранжа.	ОПК-1
11. Теорема Каруша-Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования в дифференциальной форме.	ОПК-1
12. Понятие метода поисковой оптимизации. Класс унимодальных функций, построение ε -оптимального последовательного N-шагового алгоритма (метод Фибоначчи).	ОПК-1
13. Одномерная оптимизация. Метод парабол.	ОПК-7
14. Одномерная оптимизация. Метод Пиявского.	ОПК-7
15. Методы прямого поиска на примере метода Хука-Дживса.	ОПК-7
16. Методы прямого поиска на примере метода деформируемого треугольника.	ОПК-7
17. Классические методы многомерного локального поиска и их свойства: градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска.	ОПК-7
18. Алгоритм метода Ньютона с регулировкой шага.	ОПК-7
19. Общие методы решения задач с ограничениями. Метод штрафных функций, теорема сходимости.	ОПК-7
20. Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Л.С.Понтрягина.	ОПК-7
21. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Условия трансверсальности.	ОПК-7

5.2.2. Типовые примеры заданий для контрольных работ

Пример типового задания для контрольной работы 1

1. Имеется m видов земляных работ и $n > m$ однотипных механизмов, способных выполнять эти работы. Если назначить на i —тый вид работы k механизмов, то их суммарная производительность равна d_{ik} . Найти оптимальное по суммарной производительности размещение механизмов по всем видам работ для $n = 4, m = 3$. Матрица D :

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 12 & 14 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \\ 6 & 10 & 13 & 15 \end{bmatrix}$$

2. Игрушечных дел мастер в течение недели изготавливает игрушки, а в воскресенье выходит на рынок, чтобы их продать. Вероятности успешной или неуспешной продажи, а также величины доходов в зависимости от предыдущего раунда заданы матрицами

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, D^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}, D^{(3)} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Первая стратегия соответствует отсутствию рекламы, вторая стратегия соответствует рекламе по радио, третья стратегия соответствует рекламе по телевидению. Требуется определить оптимальную стратегию в смысле максимума математического ожидания дохода на 3 шага вперед.

Пример типовых заданий для контрольной работы 2

1. Найти точку минимума функции

$$F = x_1^2 + 0.5x_2^2 + 0.5x_3^2 - x_1x_3 - 7x_1 - 5x_2 + x_3$$

при ограничениях $-0.5x_1 + x_3 - 1 \leq 0, x_1 - 5x_3 + 10 \leq 0, 5 \leq x_1 \leq 8, x_1 + x_2 = 1$.

2. Найти минимум функции $F = 5(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - 1)^2$ с точностью 0.1, используя градиентный метод с оптимальным выбором шага. Начальная точка: (3,4).

5.2.3. Примеры практических задач на экзамене

1. Задача из раздела «Динамическое программирование»

Для фермера, разводящего крупный рогатый скот, определить оптимальный график продаж на 4 года. Каждый год i некоторое количество скота y_i продается по стоимости

$$f(y_i) = k\sqrt{y_i}, k > 0, \text{ Оставшаяся часть стада увеличивается за год в } a \ (a > 1) \text{ раз.}$$

Начальное поголовье равно A .

2. Задача из раздела «Условия оптимальности в задачах математического программирования»

Выполнить анализ типа задачи, найти глобальный минимум:

$$\min 30y - 18xy - 10x + 11(x^2 + y^2)$$

$$1 + y \geq 0$$

$$x - 4y \leq -5$$

$$3x - y \leq -4$$

3. Задача из раздела «Оптимальное управление. Принцип максимума Л.С.Понтрягина». Найти оптимальное по быстродействию управление и соответствующую траекторию, переводящие объект из начальной точки (2,3) в начало координат $\ddot{x} - x = u(t), -4 \leq u(t) \leq 1$

5.2.4. Примеры тестовых вопросов-заданий для допуска по теории на экзамене

01a. Какая функция называется функцией Беллмана $S_k(x)$, смысл ее аргумента?

01b. Дайте определение выпуклого множества.

01c. Дайте определение производной функции по направлению и формулу ее вычисления через градиент.

01d. Чем определяется порядок вычислительного метода оптимизации? Приведите примеры методов первого и второго порядка.

02b. Дайте определение проекции точки y на множество D . Картинка-пример. Первая лемма о проекции.

02c. Определите множество направлений строгого локального убывания функции Q в точке x , если $\nabla Q(x) = (1; 2)$.

5.2.5. Примеры тем докладов

1. Математические детерминированные модели задач динамического программирования с дискретным временем при фиксированном количестве шагов
2. Оптимальное управление и оптимальная траектория. Принцип Р.Беллмана в форме необходимого и в форме достаточного условия.
3. Вывод рекуррентных уравнений метода динамического программирования.
4. Прямой и обратный ход вычислительного процесса. Примеры решения задач динамического программирования.
5. Обобщение уравнений Р. Беллмана на случай марковских процессов с доходами.
6. Бесконечные марковские процессы. Выбор оптимальной стратегии. Метод Р Ховарда.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Учебное пособие – 2-е изд. перераб. и доп. – М.:Наука,1988. (220 экз.)
2. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Учебное пособие. Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. – 489 с. (81экз.)
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 1986 или 2008. (136 экз.)

б) дополнительная литература:

4. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. 2-е издание. — М.: Наука, 2011. — Электронная библиотечная система «Издательство Лань», 2010, URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2330
5. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации: Учеб. Пособие. 2-е переработанное издание – М.: Физматлит, 2008. – Электронная библиотечная система «Издательство Лань», 2010, URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2184

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

6. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебно-методическое пособие. / Бирюков Р.С., Григорьева С.А., Городецкий С.Ю., Павлючонок З.Г., Савельев В.П.– Н.Новгород: ННГУ, 2010 (фонд печатных изданий кафедры ТУиДС). В форме электронного документа – URL: itmm.unn.ru/tuds/materials.htm – свободный доступ.
7. Городецкий С.Ю. Вычислительные методы поиска локальных экстремумов функций. Методическая разработка. — Н. Новгород: ННГУ, 2000 (фонд печатных изданий кафедры ТУиДС). В форме электронного документа – URL: itmm.unn.ru/tuds/materials.htm – свободный доступ.
8. Методы поиска глобального экстремума. Методические указания./ Городецкий С.Ю.– Горький:, ГГУ, 1990 (фонд печатных изданий кафедры ТУиДС). В форме электронного документа – URL: itmm.unn.ru/tuds/materials.htm – свободный доступ.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика».

Автор (ы): *к.ф.-м.н., доц. каф. ТУиДС* _____ *Савельев В.П*

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой *ТУиДС, д.ф.-м.н.* _____ *Осипов Г.В.*

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

30.11.2022 года, протокол № 3