

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
президиумом Ученого совета ННГУ
от 14.12.2021 г. протокол № 4

Рабочая программа дисциплины

Группы и алгебры Ли

Уровень высшего образования
специалитет

Направление подготовки / специальность
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная механика и приложения

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2022 год

Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к факультативной части ФТД.02.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
3	ФТД. Факультативы	Дисциплина ФТД.02, «Группы и алгебры Ли» является факультативом в ООП специальность 01.05.01 Фундаментальная математика и механика.

1. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-1. Владеет методами математического исследования при анализе проблем механики на основе знаний фундаментальных физико-математических и компьютерных наук и навыками проблемно-задачной формы представления научных знаний	<p>ПК-1.1. Знает теоретические основы фундаментальных методов исследования проблем математики и механики.</p> <p>ПК-1.2. Умеет применять полученные знания для анализа объекта исследования, определения целей и задач исследования, а также выбора корректного метода исследования научной проблемы.</p> <p>ПК-1.3. Владеет навыками научно-исследовательской деятельности в области математического моделирования, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой.</p>	<p><i>Знать</i> основные классические понятия, методы и результаты теории групп и алгебр Ли.</p> <p><i>Уметь</i> самостоятельно и корректно использовать математические методы при решении типовых задач теории групп и алгебр Ли.</p> <p><i>Владеть</i> навыками использования математических методов при исследовании групп и алгебр Ли.</p>	Собеседование Задачи Собеседование и задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	<u>1</u> ЗЕТ
Часов по учебному плану	36
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	

- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	3
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)			в том числе															Самостоятельная работа обучающегося, часы		
				Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы																	
				из них																	
	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Всего											
Очная			Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная				
Тема 1. Гладкие многообразия	15			3			3						6			0,5					
Тема 2. Группы Ли	20			5			5						10			0,5					
Тема 3. Алгебры Ли	20			5			5						10			1					
Тема 4. Соответствие Ли	16			3			3						6			1					
Текущий контроль (КСР)	1												1								
Промежуточная аттестация - зачет																					
Итого	72			16			16						33			3					

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме собеседования и решения задач на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

4. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены

	отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки.	ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не

не зачтено		сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения. .

6.2.1 Контрольные вопросы

<i>вопросы</i>	<i>Код формируемой компетенции</i>
1. Найти все алгебры Ли размерности 2 над полем.	ПК-1
2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли $sl(2)$.	ПК-1
3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над \mathbb{R} является простой бесконечномерной алгеброй Ли.	ПК-1
4. Гладкие многообразия. Подмногообразия. Гладкие отображения.	ПК-1
5. Определение и примеры групп Ли.	ПК-1
6. Алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии. Ф-связанные векторные поля.	ПК-1
7. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли.	ПК-1
8. Алгебра Ли групп $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \cdot) .	ПК-1
9. Алгебра Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$.	ПК-1
10. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.	ПК-1
11. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли.	ПК-1
12. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизаторы.	ПК-1
13. Однородные пространства. Факторгруппа по замкнутой подгруппе.	ПК-1
14. Алгебра Ли подгруппы Ли, нормальной подгруппы.	ПК-1
15. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.	ПК-1

16. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.	ПК-1
17. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.	ПК-1
18. Теорема Адо-Ивасавы.	ПК-1
19. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.	ПК-1
20. Соответствие Ли.	ПК-1

6.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции

1. Показать, что пространство ассоциативной алгебры A является алгеброй Ли относительно произведения $[a, b] = ab - ba$.
2. Пусть A – алгебра над полем K . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли относительно коммутатора $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$.
3. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов.
4. Найти все дифференцирования алгебры многочленов, алгебры многочленов Лорана. Доказать, что над полем нулевой характеристики эти алгебры простые.
5. Пусть K – поле характеристики $p > 0$. Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов $K[x]/(x^p)$.
6. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в R^n .
7. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в R^n , $n=2m$, является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
8. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
9. Доказать, что алгебра Ли $sl(n, R)$ – простая алгебра Ли.

6.2.3 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

1. Найти алгебру Ли группы $GL(n, R)$, $SL(n, R)$.
2. Найти алгебру Ли группы $SO(3)$. Найти размерность группы $O(n, R)$.
3. Найти алгебру Ли группы $SU(2)$.
4. Доказательство сходимости ряда e^A . Экспоненциальное отображение на группе $GL(n, R)$.
5. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе $O(3)$.
6. Найти неприводимые представления алгебры Ли $sl(2)$.
7. Справедлива или нет теорема Ли для разрешимых алгебр Ли над произвольным полем? Привести примеры.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

б) Дополнительная литература:

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

в) Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека «Мир уравнений» (Eqworld)
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Автор (ы): д.ф.-м.н., проф. _____ Кузнецов М.И.

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф _____ Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики
от 01.12.2021 года, протокол № 2.