

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Целочисленное программирование

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.05.01 Целочисленное программирование относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования моделей целочисленного программирования в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает методы обработки информации полученной в результате решения задач целочисленного программирования.</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать результаты решения задач целочисленного программирования.</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
--	-------

Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	22
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	
Алгоритмы линейного программирования	22	8	10	18	4
Метод отсечений.	26	4	12	16	10
Теория линейных неравенств.	22	4	10	14	8
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	16	32	50	22

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Примеры задач дискретной оптимизации. Их сведение к целочисленному программированию.
2. Прямой симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.
3. Двойственный симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.
4. Теорема двойственности в линейном программировании. Свойство дополняющей нежесткости.
5. Теорема двойственности в линейном программировании и разрыв двойственности в ЦЛП.
6. Идея метода отсечений и его геометрическая интерпретация. Выбор вычислительной схемы. Две леммы Р.Гомори о правильных отсечениях.
7. Основная теорема о линейных неравенствах.
8. Выпуклые множества и конусы, их связь. Крайние точки и экстремальные векторы. Политоп и полиэдр, симплекс. Теорема о максимизации выпуклой функции на политопе.
9. Крайние точки и опорные планы в канонической задаче линейного программирования. Теорема Каратеодори.

10. Крайние точки полиэдра. Критерий существования, оценка их числа.
11. Теоремы Фаркаша, Минковского, Вейля о выпуклом конусе.
12. Параметрическое задание множества решений системы линейных неравенств. Связь понятий “полиэдр” и “политоп”.
13. Построение остова сопряженного конуса. Разбиение полиэдра на обобщенные симплексы.
14. Эквивалентность матриц над кольцом целых чисел. Нормальная диагональная форма и теорема о приведении к ней.
15. Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел. Целочисленная решетка и ее подрешетки. Построение множества решений.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Лекции по целочисленному программированию

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

1. Полиномиальные алгоритмы линейной алгебры.
2. Алгоритм Евклида. Непрерывные дроби.
3. Полиномиальные алгоритмы нахождения нормальной эрмитовой формы и нормальной формы Смита. Линейные диофантовы уравнения.
4. Агрегация диофантовых уравнений.
4. Вполне унимодулярные матрицы. Верхняя граница Хеллера.
5. Вполне двойственная целочисленность.
6. Базисы Гильберта.
7. Целочисленный аналог теоремы Каратеодори.
8. Целочисленное округление.
9. Построение целочисленной оболочки с помощью отсечений.
10. Ранг Хватала. Верхние оценки ранга Хватала.
11. Релаксация Лагранжа.
12. Метод Бендерса.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	умение использовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	грубые ошибки, поверхностные сведения о материале курса.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Примеры задач дискретной оптимизации. Их сведение к целочисленному программированию.
2. Прямой симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.
3. Двойственный симплекс-метод, доказательство конечности. Строчечная и столбцовая запись.
4. Теорема двойственности в линейном программировании. Свойство дополняющей нежесткости.
5. Теорема двойственности в линейном программировании и разрыв двойственности в ЦЛП.
6. Идея метода отсечений и его геометрическая интерпретация. Выбор вычислительной схемы. Две леммы Р. Гомори о правильных отсечениях.
7. Основная теорема о линейных неравенствах.
8. Выпуклые множества и конусы, их связь. Крайние точки и экстремальные векторы. Полигон и полиэдр, симплекс. Теорема о максимизации выпуклой функции на политопе.
9. Крайние точки и опорные планы в канонической задаче линейного программирования. Теорема Каратеодори.
10. Крайние точки полиэдра. Критерий существования, оценка их числа.
11. Теоремы Фаркаша, Минковского, Вейля о выпуклом конусе.
12. Параметрическое задание множества решений системы линейных неравенств. Связь понятий «полиэдр» и «политоп».
13. Построение остова сопряженного конуса. Разбиение полиэдра на обобщенные симплексы.
14. Эквивалентность матриц над кольцом целых чисел. Нормальная диагональная форма и теорема о

приведении к ней.

15. Системы линейных уравнений над кольцом целых чисел. Целочисленная решетка и ее подрешетки. Построение множества решений.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Шевченко Валерий Николаевич. Линейное и целочисленное линейное программирование / ННГУ . - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2005. - 160 с. - 26.00., 4 экз.
2. Шевченко Валерий Николаевич. Качественные вопросы целочисленного программирования. - М. : Наука, 1995. - 192 с. - б/п., 64 экз.

Дополнительная литература:

1. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования = Theory of Linear and Integer Programming : в 2 т. [Т.] 1 / пер. с англ. С. А. Тарасова, М. А. Фрумкина, В. И. Шлыка ; под ред. Л. Г. Хачияна. - М. : Мир, 1991. - 360 с. : ил. - 4.50., 2 экз.
2. Схрейвер Александр. Теория линейного и целочисленного программирования = Theory of Linear and Integer Programming : в 2 т. [Т.] 2 / пер. с англ. С. А. Тарасова, М. А. Фрумкина, В. И. Шлыка ; под ред. Л. Г. Хачияна. - М. : Мир, 1991. - 702 с. ; 21 см. - 5.20., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Изд-во Лань (<https://e.lanbook.com/book>)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Веселов Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № №6.