

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

**Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Working programme of the discipline

Algebra and geometry

Higher education level

Bachelor degree

Area of study / speciality

02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology

Focus /specialization of the study programme

General Profile

Mode of study

full-time

Nizhny Novgorod

Year of commencement of studies 2025

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.06 Алгебра и геометрия относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знать понятия математического определения, утверждения, доказательства. Знать принципы построения доказательств. УК-1.2: Уметь выстраивать логические цепочки утверждений. Уметь систематизировать рассматриваемые в курсе утверждения и понимать роль каждого из них в общей картине. Уметь использовать утверждения для решения задач из других разделов курса, например, использовать свойства векторов для решения задач о прямых и плоскостях, использовать диагонализацию матриц для решения рекуррентных отношений. УК-1.3: Иметь опыт конспектирования учебника для выяснения логической структуры утверждений. Иметь опыт составления доказательств в виде логически и грамматически правильных текстов.	Тест	Экзамен: Тест

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК-1.1: Знает основные положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории и истории основного, теории коммуникации; знает основную терминологию</p> <p>ОПК-1.2: Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты</p> <p>ОПК-1.3: Имеет практический опыт работы с решением стандартных математических задач и применяет его в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1: Знать: определения и свойства операций на векторах, комплексных числах и матрицах. Знать способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Знать определение линейного оператора, его матрицы. Знать основные теоремы о линейном векторном пространстве \mathbb{R}^n.</p> <p>ОПК-1.2: Уметь использовать скалярное, векторное и смешанное произведения для решения задач о прямых и плоскостях. Уметь решать квадратные уравнения в комплексных числах, переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно. Уметь находить корни n-й степени из комплексных чисел. Уметь решать системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, находить фундаментальную систему решений. Уметь производить операции над матрицами, находить определители n-го порядка, ранг, образ и ядро матриц. Уметь находить собственные значения и собственные векторы матриц, приводить матрицы к диагональному виду. Уметь находить матрицы линейных операторов.</p> <p>ОПК-1.3: Владеть навыками доказательства свойств операций над векторами, комплексными числами и матрицами. Иметь опыт решения задач про векторы, комплексные числа, матрицы,</p>	Задачи	<p>Экзамен: Контрольная работа</p>
--	--	--	--------	--

		линейные операторы и линейные векторные пространства.		
--	--	---	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	9
Часов по учебному плану	324
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	64
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	64
- КСР	4
самостоятельная работа	120
Промежуточная аттестация	72 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	
	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	
1. Системы линейных уравнений / Systems of linear equations	24	6	6	12	12
2. Матричная алгебра / Matrix Algebra	32	8	8	16	16
3. Комплексные числа / Complex numbers	24	6	6	12	12
4. Определители / Determinants	16	4	4	8	8
5. Векторная геометрия. Прямые и плоскости / Vector geometry. Lines and planes	32	8	8	16	16
6. Векторное пространство \mathbb{R}^n / Vector Space \mathbb{R}^n	24	6	6	12	12
7. Ранг. Диагонализация / Rank. Diagonalization	24	6	6	12	12
8. Линейные отображения и их матрицы / Linear transformations and their	40	10	10	20	20

matrices					
9. Ортогональность. Метод наименьших квадратов / Orthogonality. Least squares approximation	16	4	4	8	8
10. Приложения теории векторных пространств / Applications of the theory of vector spaces	16	6	6	12	4
Аттестация	72				
КСР	4			4	
Итого	324	64	64	132	120

Contents of sections and topics of the discipline

1. Решения и элементарные преобразования строк. Метод Гаусса. Однородные и неоднородные уравнения.

Solutions and elementary row operations. Gaussian elimination. Homogeneous and nonhomogeneous equations.

2. Сложение матриц, умножение на скаляр, транспозиция. Умножение матриц на вектор. Умножение матриц. Обратная матрица. Элементарные матрицы.

Matrix Addition, scalar multiplication, and transposition. Matrix-vector multiplication. Matrix multiplication. Matrix inverses. Elementary matrices.

3. Алгебраические операции на комплексных числах. Сопряженное число. Модуль. Комплексная плоскость. Алгебраическая, тригонометрическая и показательные формы. Решение квадратных уравнений. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел.

Algebraic operations on complex numbers. Conjugate of a complex number. Absolute value. Complex plane. Rectangular, polar and exponential forms. Solving quadratic equations. De Moivre's formula. Roots of complex numbers.

4. Разложение определителя по строкам и столбцам. Присоединенная матрица. Связь с обратной матрицей.

The cofactor expansion. Adjugate matrix. Determinants and matrix inverses.

5. Сложение векторов и умножение на скаляр. Скалярное произведение, ортогональные проекции. Векторное и смешанное произведение. Параметрические, канонические и общие уравнения прямых и плоскостей.

Vector addition and scalar multiplication. Dot product, orthogonal projections. Vector and triple product. Parametric, symmetric and general equations of lines and planes.

6. Подпространства. Линейные оболочки. Линейная независимость. Базисы и размерность.

Subspaces. Span. Linear independence. Bases and dimension.

7. Пространства строк и столбцов, их сохранение при элементарных преобразованиях. Размерность пространства решений системы однородных уравнений. Собственные значения и собственные векторы. Критерий диагонализуемости.

Row and column space, their preservation under elementary operations. Rank-nullity theorem. Eigenvalues and eigenvectors. Characterization of diagonalizable matrices.

8. Матрица линейного отображения. Матрица перехода к новому базису. Матрица отображения в новом базисе. Применение линейных отображений в компьютерной графике.

Matrix of a linear transformation. Change-of-basis matrix. Matrix of a linear transformation in a new basis.

Application of linear transformations to computer graphics.

9. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Разложение Фурье. Метод наименьших квадратов.

Cauchy Inequality. Orthonormal basis. Gram–Schmidt process. Fourier expansion. Least squares approximation.

10. Свойства полиномов: теорема Безу, теорема Тэйлора, полиномиальная интерполяция, определитель Вандермонда, интерполяционные полиномы Лагранжа. Решение линейных рекуррентных уравнений.

Properties of polynomials: polynomial remainder theorem, Taylor theorem, polynomial interpolation, Vandermonde determinant, Lagrange interpolation polynomials. Solving linear recurrence relations.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Nicholson, W. Keith. Linear Algebra with Applications. Lyryx, 2021.

5. Assessment tools for ongoing monitoring of learning progress and interim certification in the discipline (module)

5.1 Model assignments required for assessment of learning outcomes during the ongoing monitoring of learning progress with the criteria for their assessment:

5.1.1 Model assignments (assessment tool - Test) to assess the development of the competency УК-1:

1. Select true statements.

- (a) If a linear system has n variables and m equations, then the augmented matrix has n rows.
- (b) A consistent linear system must have infinitely many solutions.
- (c) If a row operation is done to a consistent linear system, the resulting system must be consistent.
- (d) If a series of row operations on a linear system results in an inconsistent system, the original system is inconsistent.

2. Select true statements.

- (a) $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- (b) If $\det A = 0$, then A has two equal rows.
- (c) If R is the reduced row-echelon form of A , then $\det A = \det R$.
- (d) If $\det A = \det B$ where A and B are the same size, then $A = B$.

3. Select true statements.

- (a) There exists a 3×4 matrix that has independent columns.
- (b) There exists a 4×3 matrix A where $\text{rank } A = 2$ and A has independent columns.
- (c) If A is an $m \times n$ matrix and $\text{rank } A = m$, then $m \leq n$.
- (d) There exists a nonsquare matrix that has its rows independent and its columns independent.

Assessment criteria (assessment tool — Test)

Grade	Assessment criteria
pass	Владение основным и дополнительным материалом достаточное или с незначительными ошибками и погрешностями.
fail	Владение материалом, необходимым по данному предмету, недостаточно. Работу за время семестра можно оценить как неудовлетворительную.

5.1.2 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency ОПК-1:

1. Find the general solution to the following system of linear equations.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 5 \\ 5x + 7y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

2. Solve the system of equation by finding the inverse of the coefficient matrix.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

3. Solve the equation $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$ in complex numbers.

4. The following points are given: A(1, 0, 2), B(3, 1, -1), C(2, 1, 0), and D(3, -1, z). For which values of z all four points lie on the same plane?

5. Which of the following subsets are linearly independent? Support your answer.

- (a) $\{(1, -1, 0), (3, 2, -1), (3, 5, -2)\}$.
 (b) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$.

6. Show that the following matrix A is diagonalizable and find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is diagonal.

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 14 & 7 & 14 \\ -14 & -9 & -16 \end{bmatrix}$$

7. Obtain orthonormal bases of \mathbb{R}^3 by normalizing the following.

- (a) $\{(1, -1, 2), (0, 2, 1), (5, 1, -2)\}$
 (b) $\{(1, 1, 1), (4, 1, -5), (2, -3, 1)\}$

Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
pass	Задача решена полностью или решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами.
fail	Задача не решена или сделан только первый этап решения задачи.

5.2. Description of scales for assessing learning outcomes in the discipline during interim certification

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

	ответа		и недочетами	недочетами		недочетов	
--	--------	--	-----------------	------------	--	-----------	--

Scale of assessment for interim certification

Grade		Assessment criteria
pass	outstanding	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "outstanding", the knowledge and skills for the relevant competencies have been demonstrated at a level higher than the one set out in the programme.
	excellent	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "excellent",
	very good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "very good",
	good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "good",
	satisfactory	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "satisfactory", with at least one competency developed at the "satisfactory" level.
fail	unsatisfactory	At least one competency has been developed at the "unsatisfactory" level.
	poor	At least one competency has been developed at the "poor" level.

5.3 Model control assignments or other materials required to assess learning outcomes during the interim certification with the criteria for their assessment:

5.3.1 Model assignments (assessment tool - Test) to assess the development of the competency YK-1

1. Let x_1 be a solution to a nonhomogeneous system of linear equations and x_2 be a solution to the associated homogeneous system (i.e., the system obtained from the first one by replacing all the constants by zeros). Then both $x_1 - x_2$ and $x_1 + x_2$ are solutions to the original nonhomogeneous system.

- (a) True
- (b) False

2. Consider a 5×5 matrix A that has numbers a, b, c, d, e along the diagonal going from the bottom left to the top right corner. Suppose that all entries below this diagonal are zeros. Then $\det(A)$ is

- (a) $abcde$
- (b) $-abcde$
- (c) None of the above

3. Consider a symmetric equation $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b$ of a straight line m in the plane. Write the coordinates of some point A lying on m . What is a symmetric equation of the line p that passes through A and is orthogonal to m ?

- (a) $(x - x_0)/b = (y - y_0)/a$
 (b) $(x - x_0)/(-b) = (y - y_0)/a$
 (c) $(x - x_0)/a = (y - y_0)/(-b)$
 (d) $(x - x_0)/(-a) = (y - y_0)/b$

Assessment criteria (assessment tool — Test)

Grade	Assessment criteria
outstanding	свободное владение основным и дополнительным материалом без ошибок и погрешностей.
excellent	свободное владение основным материалом без ошибок.
very good	владение основным материалом с незначительными погрешностями.
good	владение основным материалом с более существенными погрешностями.
satisfactory	владение минимальным материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок.
unsatisfactory	владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка.
poor	отсутствие владения материалом.

5.3.2 Model assignments (assessment tool - Control work) to assess the development of the competency ОПК-1

1. Find the rank of the matrix by carrying it to a row echelon form. For each step write the operation used.

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & -9 & 9 & 6 \\ 7 & -4 & -5 & -2 & 4 \\ -7 & 3 & 5 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Find the general solution of the nonhomogeneous system of linear equations with the following augmented matrix.

- (a) Carry the augmented matrix to a reduced row echelon form using elementary row operations. For each step write the operation used.
 (b) Use the RREF to find a particular solution of the nonhomogeneous system. Verify that it satisfies the original system of equations.
 (c) Represent the general solution as a sum of the particular solution and a linear combination of basic solutions of the homogeneous system.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 6 & -5 & -15 & -23 \\ -1 & 0 & -4 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 10 & -5 & -17 & -28 \\ -1 & -2 & -8 & 5 & 18 & 21 \end{array} \right)$$

3. Solve the following equation: $x^2 - (2i+7) + 19i + 25 = 0$.

Assessment criteria (assessment tool — Control work)

Grade	Assessment criteria
outstanding	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет не менее 97% от максимальной суммы баллов.
excellent	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 90% до 96% от максимальной суммы баллов.
very good	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 87% до 89% от максимальной суммы баллов.
good	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 80% до 86% от максимальной суммы баллов.
satisfactory	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 60% до 79% от максимальной суммы баллов.
unsatisfactory	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 40% до 59% от максимальной суммы баллов.
poor	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет менее 40% от максимальной суммы баллов.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Arak M. Mathai. Linear Algebra : A Course for Physicists and Engineers. - De Gruyter, 2017. - 1 online resource. - ISBN 9783110562507. - ISBN 9783110562354. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=855970&idb=0>.
2. Манишина Е. Е. Контрольные работы по линейной алгебре : учебно-методическое пособие для студентов заочного отделения экономических специальностей / Е. Е. Манишина, Т. М. Митрякова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Центр Дистанционного Образования. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2005. - 23 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=825098&idb=0>.
3. Звонилон Виктор Иванович. Линейная алгебра. Вопросы : учебно-методическое пособие / В. И.

Звонилов ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2024. - 23 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=891982&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Strang, Gilbert. Linear algebra and its applications. - 4th ed. - [S. l.] : Thomson Brooks Cole, 2006. - VIII, 487 p. - (International student edition (ISE)). - ISBN 0-534-42200-4 : 7437,00., 1 экз.
2. Besova M. I. Basic Course of Linear Algebra and Analytical Geometry (teaching guide) : учебное пособие / Besova M. I., Kudin S. F. - Москва : НИУ МЭИ, 2022. - 140 с. - Книга из коллекции НИУ МЭИ - Математика. - ISBN 978-5-7046-2582-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=885701&idb=0>.
3. Мнухин В.Б. Advanced Linear Algebra with Applications in Calculus : учебное пособие / Мнухин В.Б.; Куповых Г.В.; Тимошенко Д.В. - Москва : ЮФУ, 2022. - 162 с. - ISBN 978-5-9275-4208-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=869140&idb=0>.
4. Задачи по алгебре (часть 2) : Учебно-методическое пособие. Ч. 2. Задачи по алгебре (часть 2) / Чирков А. Ю., Киселева Л. Г., Веселов С. И., Золотых Н. Ю., Шевчук Е. А., Сидоров С. В. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2015. - 80 с. - Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» 09.03.03 «Прикладная информатика» 09.03.04 «Программная инженерия». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729799&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Algebra and Geometry. A collection of lecture slides by N.Yu. Zolotych. URL:
<http://www.uic.unn.ru/~zny/algebrae/Lectures/algebrae.pdf>.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology.

Авторы: Макаров Евгений Маратович.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.