

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт экономики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
38.03.01 - Экономика

Направленность образовательной программы
Экономика, международный бизнес и предпринимательство

Форма обучения
очная, очно-заочная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.11 Линейная алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2: Грамотно, логично, аргументировано формирует собственные суждения и оценки	УК-1.2: Знать сущность основных теоретических методов исследования, таких как анализ и синтез Уметь осуществлять поиск и анализ информации в рамках поставленных задач Владеть основными понятиями и навыками необходимыми для применения системного подхода в решении практических задач, навыками грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки	Опрос	Зачёт: Задачи
ОПК-5: Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении профессиональных задач	ОПК-5.2: Использует современные информационные технологии и программные средства для решения профессиональных задач	ОПК-5.2: Знать современные информационные технологии и программные средства Уметь применять современные технологии в решении профессиональных задач Владеть навыками обоснования организационно-управленческих решений в рамках профессиональной деятельности	Задачи	Зачёт: Задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная	очно-заочная
Общая трудоемкость, з.е.	2	2
Часов по учебному плану	72	72
в том числе		
аудиторные занятия (контактная работа):		
- занятия лекционного типа	16	8
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16	16
- КСР	1	1
самостоятельная работа	39	47
Промежуточная аттестация	0 Зачёт	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)		в том числе									
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося, часы			
	Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы		Всего							
о ф о	о з ф о	о ф о	о з ф о	о ф о	о з ф о	о ф о	о з ф о	о ф о	о з ф о			
1). Матрицы и определители.	28	24	4	2	4	4	8	6	20	18		
2). Системы линейных уравнений. Балансовый анализ.	14	13	4	1	4	4	8	5	6	8		
3). Векторная алгебра.	14	12	4	1	4	4	8	5	6	7		
4). Линейные пространства и линейные операторы.	8	12	2	2	2	2	4	4	4	8		
5). Элементы аналитической геометрии.	7	10	2	2	2	2	4	4	3	6		
Аттестация	0	0										
КСР	1	1							1	1		
Итого	72	72	16	8	16	16	33	25	39	47		

Содержание разделов и тем дисциплины

- 1). Понятие матрицы произвольного порядка. Действия над матрицами. Виды матриц. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя. Обратная матрица. Ранг матрицы. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях матриц. Теоремы о связи ранга с числом линейно независимых строк, о представлении строки в виде линейной комбинации независимых строк.
- 2). Виды СЛУ. Решения СЛУ. Система линейных уравнений в матричной форме. Метод решения линейных систем, у которых число уравнений равно числу переменных, переходом к обратной матрице.

Правило Крамера решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Схема решения СЛУ. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные решения. Общее решение неоднородной СЛУ. Балансовые модели в экономике.

3). Геометрический вектор. Основные понятия. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Ось, числовая ось, проекция вектора на ось. Декартов базис в пространстве и на плоскости и декартова система координат. Координаты вектора. Модуль (длина) вектора в координатах. Линейные операции в координатах. Скалярное произведение в координатах.

4). Понятие линейного векторного пространства. Векторы в n -мерном евклидовом пространстве. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность векторного пространства. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису. Матрица перехода. Линейные операторы и их свойства. Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

5). Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Полуплоскость. Уравнение плоскости. Полупространство. Кривые второго порядка и их канонические уравнения.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Положение «О текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся при реализации образовательных программ высшего образования в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 29.12.2017 № 630-ОД.

2. Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Опрос) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Матрицы. Действия над матрицами. Элементарные преобразования матриц.

2. Определитель квадратной матрицы.
3. Алгоритм поиска обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
4. Теорема Лапласа.
5. Свойства определителей. 6. Обратная матрица.
7. Ранг матрицы.
8. Решение матричных уравнений.
9. Система линейных алгебраических уравнений.
10. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений.
11. Теорема Кронекера-Капелли.

12. Метод обратной матрицы для решения определенных систем линейных алгебраических уравнений.
13. Формулы Крамера.
14. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
15. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные решения.
16. Двух, трехмерные и n-мерные векторы. 17. Операции над векторами.
18. Линейная зависимость векторов. 19. Линейное n-мерное пространство.
20. Базис и размерность n-мерного пространства. 21. Матрица перехода к новому базису.
22. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. 23. Собственные значения и собственные векторы матрицы
24. Уравнения прямой линии на плоскости. Полуплоскость.
25. Уравнение плоскости. Полупространство.
26. Уравнение прямой линии в пространстве.
27. Прямая и гиперплоскость в n-мерном точечном пространстве.
28. Полупространство в n-мерном точечном пространстве.
29. Эллипс, его свойства и каноническое уравнение. 30. Гипербола, ее свойства и каноническое уравнение. 31. Парабола, ее свойства и каноническое уравнение

Критерии оценивания (оценочное средство - Опрос)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	• «отлично» - 90-100% правильных ответов. • «хорошо»- 70-89% правильных ответов. • «удовлетворительно» – 50-69% правильных ответов
не зачтено	• «неудовлетворительно» – менее 50% правильных ответов.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-5:

Примеры типовых задач для проведения промежуточной аттестации и по ит

1. Вычислить произведение двух ма

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего

Ответ: 40

3. Найти ранг матрицы:

Ответ:

6. Решить систему уравнений,

Ответ: (1; 2; 3)

7. Решить систему уравнений

Ответ: (3; 0; -2)

7. Решить систему уравнений

12. Составить уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$. Найти радиус окружности.

Ответ: $2x - y = 0$; $\sqrt{5} / 6$.

13. Написать уравнение окружности, касательной к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $y = x + 1$.

Ответ: $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

14. На гиперболое $x^2 - 4y^2 = 16$ взята точка $M(10, 3)$. Найти радиусы окружностей, касающихся гиперболы в этой точке и от неё до фокусов.

Ответ: $r = 1$, $r_1 = 9$.

15. Написать уравнение параболы, касательной к окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке пересечения прямой $y = x + 1$ относительно оси Ox .

Ответ: $y^2 = -3x$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Материал изложен полно, даны правильные определения основных понятий; Обнаружено понимание материала, обучающийся обосновывает свои суждения, применяет знания на практике, приводит примеры не только из учебника, но и самостоятельно сформулированные
отлично	Материал изложен полно; Обнаружено понимание материала
очень хорошо	Ответ удовлетворяет тем же требованиям, что и для отметки «отлично», но обучающийся допускает 1-2 ошибки, которые способен исправить
хорошо	Ответ удовлетворяет тем же требованиям, что и для отметки «очень хорошо», но обучающийся допускает 1-2 ошибки, которые способен исправить, и 1-2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого материала .
удовлетворительно	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но: 1. материал изложен неполно, допущены неточности в определении понятий или в формулировках правил; 2. не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и приводить примеры; 3. излагает материал непоследовательно и допускает ошибки
неудовлетворительно	Обучающийся обнаруживает незнание большей части ответа соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, непоследовательно и неуверенно излагает материал
плохо	Обучающийся обнаруживает незнание ответа соответствующего вопроса

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
		не зачтено			зачтено		
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место	Минимально допустимый уровень знаний.	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, превышающем программу

	оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	грубые ошибки	Допущено много негрубых ошибок	программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	программе подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	программе подготовки и. Ошибок нет.	подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»
--	--------------	---

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, диаметры длины a_1 и b_1 построенных полудиаметров

Ответ: Сопряжённый диаметр $y = -\frac{x}{2}$,

2. Вычислить выражение

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

3. Найти координаты центра, вершин и

Ответ: $(1; -5)$, $(0; -4)$ и $(2; -6)$, $x = 1$, y

4. Ординаты всех точек окружности уравнение полученной новой кривой

Ответ: $x^2 / 36 + y^2 / 4 = 1$

Ответ: 2

9. Привести матрицу к ступенчатому виду

Ответ:

$A =$

10. Решите матричное уравнение:

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-5

1. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$,
длины a_1 и b_1 построенных полуд

Ответ: Сопряжённый диаметр y

2. Вычислить выражение

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

3. Найти координаты центра, ве

Ответ: $(1;-5)$, $(0;-4)$ и $(2;-6)$, x

Ответ: 2

9. Привести матрицу к ступенчатому виду

Ответ:

$A =$

Ответ: (1;1;1)

14. Векторы \vec{a} и \vec{b} составл
построенного на векторах $\vec{a} -$

Ответ: $50\sqrt{2}$.

15. Показать, что $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) :$
равенства.

Ответ: Удвоенная площадь
построенного на его диагоналях.

16. Составить уравнения прямь

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	• «отлично» - 90-100% правильных ответов. • «хорошо»- 70-89% правильных ответов. • «удовлетворительно» – 50-69% правильных ответов
не зачтено	• «неудовлетворительно» – менее 50% правильных ответов.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Банки и биржи : Юнити, 1998. - 471 с. - ISBN 5-238-00030-8 : 90.00., 1 экз.
2. Ильин Владимир Александрович. Аналитическая геометрия : учеб. для физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" ун-тов. - Изд. 3-е, стер. - М. : Наука, 1981. - 232 с. : ил. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 5). - 0.70., 59 экз.
3. Минорский В. П. Векторная алгебра. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. ; Л. : [б. и.], 1951. - 80 с. - 1.40., 1 экз.
4. Минорский Василий Павлович. Сборник задач по высшей математике : [для втузов]. - 11-е изд., стер. - М. : Наука, 1971. - 352 с. : с черт. - 0.60., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Бюшгенс С. С. Аналитическая геометрия : в 2 ч. Ч. 2. - 4-е изд., перераб. - М. ; Л. : Гостехиздат, 1946. - 318 с. - 0.60., 1 экз.
2. Выгодский М. Я. Аналитическая геометрия. - М. : Физматгиз, 1963. - 528 с. : черт. - (Основы высшей математики ; т. 1). - 1.09., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. www.Math-Net.ru – имеется свободный доступ (по истечении 3-х лет со дня публикации) к математическим журналам Отделения Математики РАН,
2. <http://mathworld.wolfram.com> – краткие энциклопедические статьи по математике,
3. <http://eqworld.ipmnet.ru> – решение различных типов уравнений, в том числе, дифференциальных,
4. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk> – статьи по истории математики.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 38.03.01 - Экономика.

Автор(ы): Колпаков Андрей Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Семенов Алексей Валерьевич, кандидат физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 12.11.2024, протокол № №5.