

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дифференциальные уравнения

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
03.03.02 - Физика

---

Направленность образовательной программы  
Физика конденсированного состояния

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.08.04 Дифференциальные уравнения относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;	ИД ОПК-1: Демонстрация способности применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ИД ОПК-1: Знать основы дифференциального исчисления, основные методы решения дифференциальных уравнений. Уметь решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания основ дифференциального исчисления Владеть базовыми навыками решения дифференциальных уравнений.	Аудиторная контрольная работа	Экзамен: Задания Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	33
Промежуточная аттестация	45 Экзамен

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
Дифференциальные уравнения первого порядка	32	10	12	22	10
Дифференциальные уравнения высших порядков	8	2	3	5	3
Линейные дифференциальные уравнения	6	2	2	4	2
Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	6	2	2	4	2
Линейные неоднородные уравнения	8	2	3	5	3
Уравнения Эйлера	6	2	2	4	2
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	9	4	2	6	3
Теория устойчивости	11	4	3	7	4
Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных	11	4	3	7	4
Аттестация	45				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	33

#### Содержание разделов и тем дисциплины

##### 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Теорема существования и единственности решения. Частное решение. Общее решение. Общий интеграл. Поле направлений, изоклины. Типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными; однородные уравнения и сводящиеся к однородным; линейные уравнения; уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Признак полного дифференциала. Интегрирующий множитель. Особые точки и особые линии. Типы особых точек. Особые решения. Огибающая однопараметрического семейства плоских кривых. Уравнение огибающей. Огибающая семейства интегральных кривых – особое решение уравнения. Изогональные и ортогональные траектории. Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции и разрешенных относительно аргумента. Уравнения Лагранжа и Клеро.

##### 2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Дифференциальное уравнение семейства кривых. Уравнения, допускающие понижение порядка.

##### 3. Линейные дифференциальные уравнения.

Однородные и неоднородные уравнения. Линейный оператор  $L(y)$  и его свойства. Линейные однородные уравнения: теоремы о сумме решений и о комплексных решениях. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции. Определитель Вронского и его свойства. Теорема об общем решении уравнения порядка  $n$ . Фундаментальная система решений.

4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение и характеристический многочлен. Решение уравнения в случае действительных и комплексных корней. Решение уравнения в случае кратных корней.

5. Линейные неоднородные уравнения.

Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Типы решений. Теорема о форме частного решения, в случае, когда правая часть является суммой слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид.

6. Уравнения Эйлера.

Однородные уравнения Эйлера, характеристическое уравнение и общее решение. Форма решений в случае комплексных корней и в случае кратных корней. Неоднородные уравнения Эйлера со специальной правой частью. Типы решений.

7. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Теорема существования и единственности решения. Поведение фазовых траекторий в случае автономных и неавтономных систем. Метод сведения системы  $n$  уравнений первого порядка к одному уравнению порядка  $n$ . Системы линейных дифференциальных уравнений – основные теоремы.

Структура общего решения. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. Теория устойчивости.

Определение устойчивости решения дифференциального уравнения по линейному приближению.

Теорема Ляпунова. Теорема Четаева. Определение устойчивости решений с помощью матрицы Гурвица.

9. Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Решение линейного однородного уравнения. Уравнения характеристик. Квазилинейные неоднородные уравнения. Неоднородные уравнения с двумя независимыми переменными.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа студента – неотъемлемая часть подготовки высококвалифицированного специалиста в соответствующей области. Ее цель – формирование у студентов способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию. Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного и дополнительного материала, решение домашних заданий с последующей проверкой навыков решения задач. Проработка лекционного материала осуществляется еженедельно после проведения аудиторных занятий в рамках часов, отведенных студентам на самостоятельную работу. Кроме того, работа с лекционным и дополнительным материалом (рекомендованной литературой, приведенной в конце данной программы) проводится в период сессии при подготовке к экзамену по дисциплине.

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

## 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

#### Контрольная работа №1 Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнение.
- $(4y^2 + x^2)y' = xy$ ;
  - $xy' + y = y^2 \ln x$ ;
  - $x(y'^2 - 1) = 2y'$ .
2. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий:

$$y = (x + C)^2.$$

#### Контрольная работа №1 Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнение.
- $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ ;
  - $xy^2 y' = x^2 + y^3$ ;
  - $x - y\sqrt{1 + y'^2} = 0$ .
2. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий:

$$y^2 = 2px.$$

#### Контрольная работа №2 Вариант 1

- Решить дифференциальные уравнения:
- $y'(e^x + 1) + y^2 = 0$ .
  - $y'' - 9y = 0$ .
  - $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$ .
  - $y'' + y = \sin x$ .

#### Контрольная работа №2 Вариант 2

- Решить дифференциальные уравнения:
- $y'' - xy'' + (y'')^2 = 0$ .
  - $y'' - 2y' - y = 0$ .
  - $y'' + 6y' + 10y = -2e^{3x} \cos x$ .
  - $y'' - 4y' + 4y = 3x^2$ .

## Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Обучающийся демонстрирует выдающийся уровень знаний базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует устойчивые практические навыки решения задач, в том числе задач повышенной сложности
отлично	Обучающийся демонстрирует высокий уровень знаний базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует устойчивые практические навыки решения задач, в том числе задач повышенной сложности
очень хорошо	Обучающийся демонстрирует знание базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует устойчивые практические навыки решения задач
хорошо	Обучающийся демонстрирует знание базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует практические навыки решения простых задач
удовлетворительно	Обучающийся демонстрирует знание только базовых понятий, положений без их обоснования, демонстрирует практические навыки решения лишь самых простых задач
неудовлетворительно	Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания об основных разделах курса, не показывает каких-либо практических навыков решения основных

Оценка	Критерии оценивания
	задач
плохо	Обучающийся не демонстрирует базовых знаний об основных разделах курса, не показывает каких-либо практических навыков решения основных задач

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

	обучающегося от ответа		некоторым и недочетами	и недочетами	недочетов	ошибок и недочетов	
--	------------------------	--	------------------------	--------------	-----------	--------------------	--

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

<ul style="list-style-type: none"> <li>• решить уравнение: <math>(4y^2 + x^2)y' = xy</math>;</li> <li>• решить уравнение: <math>y''(e^x + 1) + y' = 0</math>;</li> <li>• решить уравнение <math>(1+x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \ln y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0</math> при условии, что <math>z = y</math> при <math>x = 0</math>.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• решить уравнение: <math>xy' + y = y^2 \ln x</math>;</li> <li>• решить уравнение <math>y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}</math>;</li> <li>• решить уравнение: <math>(1+x^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \ln y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + 1</math>.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• решить уравнение: <math>y' \operatorname{tg} x - y = 2</math>;</li> <li>• решить уравнение <math>y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{\ln^2 x}{x^2}</math>;</li> <li>• решить уравнение: <math>(1+y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + yx \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (z^2 + 1)</math>.</li> </ul>

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Обучающийся демонстрирует выдающийся уровень знаний базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует устойчивые практические навыки решения задач, в том числе задач повышенной сложности
отлично	Обучающийся демонстрирует высокий уровень знаний базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует устойчивые практические навыки решения задач, в том числе задач повышенной сложности
очень хорошо	Обучающийся демонстрирует знание базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует устойчивые практические навыки решения задач
хорошо	Обучающийся демонстрирует знание базовых понятий, положений с обоснованиями, демонстрирует практические навыки решения простых задач
удовлетворительно	Обучающийся демонстрирует знание только базовых понятий, положений без их обоснования, демонстрирует практические навыки решения лишь самых простых задач
неудовлетворительно	Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания об основных разделах курса, не показывает каких-либо практических навыков решения основных задач
плохо	Обучающийся не демонстрирует базовых знаний об основных разделах курса, не показывает каких-либо практических навыков решения основных задач

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Теорема о существовании и единственности решения ДУ 1-го порядка.
2. Интегрируемые типы ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производной.
3. Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли.
4. ДУ в полных дифференциалах. Признак полного дифференциала. Интегрирующий множитель.
5. Особые точки и особые линии ДУ 1-го порядка. Типы особых точек. Особые решения.
6. Огибающая однопараметрического семейства плоских кривых.
7. ДУ однопараметрического семейства плоских кривых. Изогональные траектории.
8. ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. ДУ Лагранжа и Клеро.
9. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
10. Линейный дифференциальный оператор  $L(y)$  и его свойства. Теорема о сумме решений ЛОДУ. Теорема о комплексных решениях ЛОДУ с действительными коэффициентами.
11. Понятие линейно зависимых/независимых функций. Следствия из определения. Определитель Вронского. Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций.
12. Фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка. Теорема о виде общего решения ЛОДУ.
13. Теорема о виде общего решения ЛНДУ. ЛНДУ высших порядков. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

14. ЛОДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай кратных корней. Случай комплексных корней.
15. Решение ЛНДУ  $n$ -го порядка со специальной правой частью.
16. Уравнения Эйлера. Связь уравнений Эйлера с ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Однородные уравнения Эйлера, характеристическое уравнение, общее решение. Неоднородные уравнения Эйлера со специальной правой частью.
17. Системы обыкновенных ДУ 1-го порядка. Автономные и неавтономные системы. Сведение системы  $n$  уравнений 1-го порядка к одному ДУ порядка  $n$ . Первые интегралы системы обыкновенных ДУ.
18. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами.
19. Сведение задачи об устойчивости произвольного решения системы уравнений к задаче об устойчивости нулевого решения. Исследование на устойчивость по линейному приближению.
20. Определение устойчивости решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами с помощью матрицы Гурвица.
21. Теорема Ляпунова. Теорема Четаева.
22. Случай малого коэффициента при старшей производной.
23. ЛОДУ в частных производных. Уравнение характеристик.
24. Квазилинейные неоднородные ДУ в частных производных.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Обучающийся демонстрирует выдающийся уровень знаний в самостоятельном изложении всех теоретических положений курса и их обосновании, отвечает на дополнительные и уточняющие вопросы
отлично	Обучающийся демонстрирует высокий уровень знаний в самостоятельном изложении всех теоретических положений курса и их обосновании, отвечает на дополнительные и уточняющие вопросы
очень хорошо	Обучающийся демонстрирует связное изложение всех теоретических положений курса и их обоснования, но не отвечает на дополнительные и уточняющие вопросы
хорошо	Обучающийся демонстрирует связное изложение всех теоретических положений курса и их обоснования с незначительными наводящими вопросами
удовлетворительно	Обучающийся демонстрирует изложение только формулировок основных теоретических положений курса без их обоснования и с использованием наводящих вопросов
неудовлетворительно	Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания об основных теоретических разделах курса, путается в определениях
плохо	Обучающийся не демонстрирует никаких знаний об основных теоретических разделах курса

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

## Основная литература:

1. Эльсгольц Лев Эрнестович. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник. - 5-е изд. - М. : Эдиториал УРСС, 2002. - 320 с. - ISBN 5-354-00135-8 : 117.00., 68 экз.
2. Пискунов Николай Семенович. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для вузов : [в 2 т.]. Т. 2. - Изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2004. - 544 с. - ISBN 5-89602-013-9 (т. 2). - ISBN 5-89602-014-7 : 183.00., 89 экз.
3. Понтрягин Лев Семенович. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. для студентов мат. специальностей ун-тов. - М. : Наука, 1982. - 331 с. - 0.85., 141 экз.
4. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2003. - 176 с. - (R&C Dynamics). - ISBN 5-93972-008-0 : 64.35., 201 экз.
5. Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум / Т. В. Муратова. - Москва : Юрайт, 2023. - 435 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-534-01456-3. - Текст : электронный // ЭБС "Юрайт"., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=845573&idb=0>.

## Дополнительная литература:

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Арнольд В. И. - 2-е изд., стереотип. - Москва : МЦНМО, 2020. - 341 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-3254-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828701&idb=0>.
2. Степанов Вячеслав Васильевич. Курс дифференциальных уравнений : учебник. - 8-е изд., стер. - М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. - 468 с. : ил. - 23.00., 13 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Подборка литературы по тематике дисциплины в электронной физико-математической библиотеке открытого доступа EqWorld <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 03.03.02 - Физика.

Автор(ы): Малышев Александр Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Бурдов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 30.11.2024, протокол № б/н.