

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«14» декабря 2021 г. № 4

## **Рабочая программа дисциплины**

Функциональный анализ

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Направление подготовки

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

Форма обучения  
Очная

Нижний Новгород

2022 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части Блока 1 Дисциплины (модули) Б1.О.24.

№ вари-анта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.О.24, «Функциональный анализ», относится к обязательной части ООП направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>ОПК-1.</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<i>Знать</i> основные понятия, методы и результаты функционального анализа	<i>собеседование</i>
	ОПК-1.2. Умеет решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук	<i>Уметь</i> применять теоретические знания к решению задач функционального анализа	<i>задачи</i>
	ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	<i>Владеть</i> техникой доказательства Утверждений функционального анализа, методами и способами отыскания решений типовых задач.	<i>задачи</i>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>4 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа)</b>	<b>66</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>42</b>
<b>Контроль</b>	<b>36</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Тема 1. Метрические пространства; открытые и замкнутые множества.	6	2	2		4	2
Тема 2. Компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа.	7	2	2		4	3
Тема 3. Полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений.	7	2	2		4	3
Тема 4. Топологические пространства; примеры. Определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства.	7	2	2		4	3

Тема 5. Скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца.	7	2	2		4	3
Тема 6. Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение.	7	2	2		4	3
Тема 7. Сопряженное пространство, его полнота.	7	2	2		4	3
Тема 8. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала.	7	2	2		4	3
Тема 9. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах.	7	2	2		4	3
Тема 10. Общий вид линейного функционала на гильбертовом пространстве.	7	2	2		4	3
Тема 11. Линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор.	9	3	3		6	3
Тема 12. Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы.	9	3	3		6	3
Тема 13. Принцип равномерной ограниченности; обратный оператор.	9	3	3		6	3
Тема 14. Спектр и резольвента линейного оператора.	9	3	3		6	3
Текущий контроль (КСР)	3				3	
Промежуточная аттестация – экзамен и зачет.	36					
<b>Итого</b>	144	32	32		67	41

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет и экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семест-

ра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),

- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки  при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач
---------------	--	---	---	--	--	--	---

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
---------	-----------------------------

1) Определение метрики и метрического пространства. Примеры метрических пространств: $\mathbf{R}^n$ , $C[a,b]$ , $\ell_2$ , $m$ .	ОПК-1
2) Определение предела последовательности в метрическом пространстве. Единственность предела. Что означает сходимости $E_n$ , $D$ , $C[a,b]$ , $\ell_2$ , $m$ . Ограниченность сходящейся последовательности.	ОПК-1
3) Окрестность. Теорема отделимости в метрическом пространстве.	ОПК-1
4) Предельная точка. Изолированные точки. Производное множество. Замыкание. Замкнутый шар. Свойства замкнутых множеств. Свойства операции замыкания.	ОПК-1
5) Открытое множество. Открытый шар. Дополнение замкнутого и открытого множеств. Свойства открытых множеств.	ОПК-1
6) Примеры замкнутого и открытого множеств.	ОПК-1
7) Непрерывные отображения метрических пространств.	ОПК-1
8) Всюду плотные множества. Пример. Сепарабельные метрические пространства. Примеры сепарабельного и несепарабельного пространств.	ОПК-1
9) Нигде не плотные множества. Примеры.	ОПК-1
10) Фундаментальные последовательности. Полное метрическое пространство. Примеры полных и неполных метрических пространств.	ОПК-1
11) Теорема о вложенных шарах.	ОПК-1
12) Сжимающее отображение. Принцип сжимающих отображений.	ОПК-1
13) Применение принципа сжимающих отображений: а) к доказательству существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения; б) к нахождению корней уравнений; в) к решению систем линейных уравнений.	ОПК-1
14) Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.	ОПК-1
15) Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода. Обобщенный принцип сжимающих отображений.	ОПК-1
16) Лемма Гейне-Бореля. Компактные множества. Примеры некомпактных множеств в $C[0;1]$ и $\ell_2$ .	ОПК-1
17) $\varepsilon$ -сеть. Вполне ограниченные множества. Пример. Предкомпактность. Теорема Хаусдорфа. Основной параллелепипед в $\ell_2$ .	ОПК-1
18) Равнотепенная непрерывность в $C[a,b]$ . Теорема Арцела. Пример. Свойство непрерывных функций на компакте.	ОПК-1

19) Линейные пространства.	ОПК-1
20) Линейные функционалы и операторы.	ОПК-1
21) Нормированные пространства.	ОПК-1
22) Банахово и гильбертово пространства.	ОПК-1
23) Теорема Бэра о категории.	ОПК-1
24) Ортогональные системы. Теорема об ортогонализации.	ОПК-1
25) Ряды Фурье.	ОПК-1
26) Линейные непрерывные функционалы и операторы.	ОПК-1
27) Пространство операторов. Их сходимость.	ОПК-1
28) Принцип равномерной ограниченности. Теорема об открытом отображении. Теорема Банаха об обратном операторе.	ОПК-1
29) Спектр. Резольвента.	ОПК-1
30) Самосопряженные операторы.	ОПК-1
31) Вполне непрерывные операторы.	ОПК-1
32) Применение к интегральным уравнениям.	ОПК-1

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

#### Варианты контрольных работ:

#### Контрольная работа №1.

##### Вариант 1.

1. Проверить аксиомы метрики в метрическом пространстве,

состоящем из натуральных чисел, с метрикой

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n; \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n. \end{cases}$$

2. Доказать полноту пространства  $C[a, b]$  с метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

3. Показать, что уравнение имеет единственное решение. Найти приближенное решение уравнения и оценить погрешность:

$$x^5 + 5x - 3 = 0.$$

##### Вариант 2.



1. Записать определение и отрицание определения внутренней точки. Для

$A = (0,1] \cup \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  найти множества точек прикосновения, предельных, внутренних, изолированных и граничных точек.

2. Доказать, что любое подмножество предкомпактного множества в метрическом пространстве является предкомпактным.

3. Доказать, что в евклидовом пространстве выполняется равенство параллелограмма  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

## Контрольная работа № 2.

### Вариант 1

1. Докажите, что функционал  $\varphi$  является линейным и ограниченным на нормированном пространстве  $X$ , и найдите (или оцените) его норму, если  $X = C[0,3]$ ,  $\varphi(x) = \int_0^3 sx(s)ds$ .
2. Найдите резольвенту и спектр, а также собственные значения и собственные функции оператора  $A(x) = \int_0^\pi \sin 2t \cdot \cos s \cdot x(s)ds$  на пространстве  $H = L^2[0,\pi]$ .

### Вариант 2

1. Докажите, что функционал  $\varphi$  является линейным и ограниченным на нормированном пространстве  $X$ , и найдите (или оцените) его норму, если  $X = \ell_1$ ,  $\varphi(x) = x_1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ .
2. Найдите резольвенту и спектр, а также собственные значения и собственные функции оператора  $A(x) = \int_0^5 ts^2 \cdot x(s)ds$  на пространстве  $H = L^2[0,5]$ .

**Пример вопросов, выносимых на зачет**, для оценивания результатов формирования компетенций ПК-2.

1. С помощью принципа сжимающих отображений решить уравнение  $x^7 + 8x - 3 = 0$ . Оценить погрешность приближённого решения.
2. Найти скалярное произведение функций  $y = \sin x$  и  $g = e^x$  в пространстве  $L_2[0,1]$ .
3. Найти норму функционала  $F : C[0,1] \rightarrow R$ , определяемого формулой

$$F(y) = \int_0^1 (1 - x^2) y(x) dx.$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1989. 623 с. (93 экз. Ссылка на учетную карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=93244> ).

б) дополнительная литература:

1. Дерр В.Я. Действительный анализ. М.: Юрайт, 2012. 464 с. (10 экз. Ссылка на учетную карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=435229> ).

2. Леонтьева Т.А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=377270>).
3. Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Функциональный анализ», <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1517> созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (3++) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор: к.ф.-м.н., доц. Кротов Н.В.

Заведующий кафедрой ДУМЧА: д.ф.-м.н., профессор Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 1 декабря 2021 года, протокол № 2.