

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Комплексный анализ

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.23 Комплексный анализ относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2: Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	ОПК-1.1: Знает основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой.  ОПК-1.2: Умеет решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным, но более высокого уровня сложности; решать математические задачи, которые требуют некоторой оригинальности мышления;	Контрольная работа	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36

**3.2. Содержание дисциплины**

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
Тема 1. Краткие исторические сведения. Комплексные числа. Комплексная плоскость. Комплексная сфера.	12	4	4	8	4
Тема 2. Функции комплексного переменного	12	4	4	8	4
Тема 3. Основные сведения о конформных отображениях	12	4	4	8	4
Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного	12	4	4	8	4
Тема 5. Функциональные ряды	12	4	4	8	4
Тема 6. Регулярные функции	12	4	4	8	4
Тема 7. Интегралы, зависящие от параметра	14	4	4	8	6
Тема 8. Ряд Лорана и изолированные особые точки однозначного характера	10	2	2	4	6
Тема 9. Теория вычетов и её применения	10	2	2	4	6
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	32	32	66	42

**Содержание разделов и тем дисциплины****1. Краткие исторические сведения.**

Комплексные числа. Комплексная плоскость. Комплексная сфера.

Комплексные числа и действия над ними. Комплексная плоскость. Различные формы записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.

Последовательности комплексных чисел. Предел последовательности. Необходимые и достаточные условия существования предела. Теорема Больцано - Вейерштрасса и критерий Коши.

Сравнение свойств последовательностей  $z_n$  и  $\arg z_n$ . Бесконечно удалённая точка.

Числовые ряды. Сумма ряда. Критерий сходимости ряда. Сфера Римана. Стереографическая проекция.

Сферическая метрика. Множества и кривые на комплексной плоскости. Конечные, ограниченные и неограниченные множества. Внутренние, внешние и граничные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Связность. Область. Порядок связности области. Непрерывная кривая. Гладкие и кусочно-гладкие кривые.

**2. Функции комплексного переменного.**

Понятие функции. Функция как отображение. Обратная функция. Однозначные и однолистные

функции. Функции  $w = \bar{z}$  и

$w = z$ . Точки ветвления функции  $\sqrt[n]{z}$ . Предел функции. Необходимые и достаточные условия существования предела. Непрерывные функции. Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке. Равномерная непрерывность. Основные теоремы о непрерывных функциях. Дифференцирование функции комплексного переменного. Определение производной. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Условия Коши – Римана. Голоморфная функция. Геометрический смысл производной.

### 3. Основные сведения о конформных отображениях.

Понятие конформного отображения. Конформность в точке комплексной плоскости. Угол между кривыми в бесконечности. Конформность в бесконечности. Конформность в области. Формулировки основных теорем о конформных отображениях (принцип сохранения области, правило обхода границы, теорема Римана). Линейная функция. Дробно-линейная функция (перечислить основные свойства). Отображение полуплоскости и единичного круга на единичный круг.

### 4. Интегрирование функций комплексного переменного. Определение интеграла по кривой. Способы вычисления интеграла. Основные свойства интегралов от комплексных функций.

Интегральная теорема Коши. Обобщенная теорема Коши. Теорема Коши для конечносвязной области. Первообразная и неопределённый интеграл. Теорема о первообразной. Формула Ньютона – Лейбница. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Теорема о среднем для гармонической функции. Интеграл типа Коши. Теорема о производных интеграла типа Коши.

### 5. Функциональные ряды.

Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Теоремы о непрерывности суммы ряда и о возможности почленного интегрирования ряда. Теорема Вейерштрасса о почленном дифференцировании функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Формула Коши – Адамара. Единственность суммы степенного ряда. Сложение, умножение и деление степенных рядов.

### 6. Регулярные функции.

Понятие регулярной функции. Основной критерий регулярности. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля и доказательство основной теоремы высшей алгебры. Теорема единственности регулярной функции. Понятия и принципы аналитического продолжения. Разложение в степенные ряды основных элементарных функций.

### 7. Интегралы, зависящие от параметра.

Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, о непрерывности интеграла по параметру, об изменении порядка интегрирования. Теорема о регулярности интеграла, зависящего от параметра. Несобственные интегралы от функции комплексного переменного (с особенностью в бесконечности и с особенностью в конечной точке). Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Теоремы о регулярности несобственного интеграла по параметру.

### 8. Ряд Лорана и изолированные особые точки однозначного характера.

Ряд Лорана (определение). Область сходимости ряда Лорана. Регулярность суммы ряда в области сходимости. Устранимая особая точка. Теорема об ограниченности функции в окрестности устранимой особой точки. Полюс. Связь между нулями и полюсами. Кратность полюса. Ряд Лорана в окрестности полюса. Целые функции. Мероморфные функции. Теорема о мероморфной функции с конечным числом полюсов.

### 9. Теория вычетов и её применения.

Определение вычета. Вычисление вычета. Основная теорема о вычетах. Следствие основной теоремы о вычетах. Нахождение вычета в случае полюса. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше. теорема об обратной функции.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Комплексный анализ (Филиппов В.Н., Сизова Н.А.)" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1568>).

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Вариант контрольной работы:

**Вариант 1.**

Найти значение модуля функции  $w = \sin z$  в точке  $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$ .

Решение:

Имеем  $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

Тогда

$$\sin(\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})) = \sinh(\ln(2 + \sqrt{5})) = \frac{1}{2}(e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}}) = 2.$$

Полный перечень вариантов приведен в ФОС дисциплины.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Более половины заданий контрольной работы выполнены без ошибок или с незначительными ошибками.
не зачтено	Выполнено менее половины заданий контрольной работы.

#### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

##### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой

	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Примеры задач:

2. Найти образ треугольника с вершинами в точках  $z_1 = 0, z_2 = -i, z_3 = -1$  при  $w = \frac{1}{z}$ .
3. Вычислить:  $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$ .
4. Найти образ области  $D = \left\{ z \in \mathbb{C}: \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right\}$  при  $w = \frac{z}{z+1}$ .
5. Разложить функцию  $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$  в кольцо  $1 < |z| < 2$ .
6. Найти образ треугольника с вершинами в точках  $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = i$  при  $w = \frac{1}{z}$ .
7. Вычислить  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + \frac{1}{4}} dx$ .

Полный перечень приведен в ФОС дисциплины.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продemonстрированы все основные умения,.Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
отлично	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме

Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами
хорошо	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.
удовлетворительно	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Примеры вопросов:

Определение вычета. Основная теорема о вычетах. Следствие.
Интегральная теорема Коши.
Теорема о первообразной. Неопределенный интеграл.
Понятие римановой поверхности. Риманова поверхность функции $w = \sqrt[n]{z}$ .
Теоремы о логарифмическом вычете.
Интеграл типа Коши.
Теорема об особых точках суммы степенного ряда на границе круга сходимости.
Геометрический смысл производной.
Вычисление интеграла $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}} dx$ .
Устраняемая особая точка.
Логарифмический вычет. Принцип аргумента.

Полный перечень вопросов приведен в ФОС дисциплины.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.



Оценка	Критерии оценивания
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Евграфов М. А. Аналитические функции / Евграфов М. А. - 4-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 448 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-0809-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799564&idb=0>.
2. Сандаков Е. Б. Сборник домашних заданий по теории функций комплексного переменного / Сандаков Е. Б., Селиванова С. Г. - Москва : НИЯУ МИФИ, 2009. - 40 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции НИЯУ МИФИ - Математика. - ISBN 978-5-7262-1133-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=716350&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной / Петрушко И. М., Елисеев А. Г., Качалов В. И., Кудин С. Ф. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 368 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-1064-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799669&idb=0>.
2. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / Привалов И. И. - 16-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 432 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-9392-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=783579&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://lib.unn.ru/>

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1568>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Филиппов Викторий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.