МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением президиума
Ученого совета ННГУ
от 30.11.2022 г.
протокол № 13

Рабочая программа дисциплины
Алгебра и геометрия
Algebra and geometry

Направление подготовки (специальность)
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии
02.03.02 Fundamental computer science and information technology

Профиль подготовки (специализация)
Общий профиль
General profile

Квалификация (степень) выпускника
бакалавр
Bachelor

Форма обучения
очная
full-time

Нижний Новгород
2021

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина Б1.О.06 «Алгебра и геометрия» относится к обязательной части ООП по направлению подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Дисциплина читается студентам 1 курса в 1 и 2 семестрах, 10 зачетных единиц, 360 часов, экзамен по окончании 1 и 2 семестров.

Discipline Б1.О.06 "Algebra and geometry" is a mandatory course.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.06 «Алгебра и геометрия» относится к обязательной части ООП направления подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции) / Formed competencies (code, content of competence)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции / Planned learning outcomes for the discipline (module), in accordance with the indicator of achievement of competency		Наименование оценочного средства / Name of the evaluation tool
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора) / Competency achievement indicator (code, indicator content)	Результаты обучения по дисциплине / Learning outcomes by the discipline	
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации. УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности. УК-1.3. Имеет практический опыт работы с информационными объектами и сетью Интернет, опыт научного поиска, опыт библиографического разыскания, создания научных текстов.	Знать понятия математического определения, утверждения, доказательства. Знать принципы построения доказательств. Уметь выстраивать логические цепочки утверждений. Уметь систематизировать рассматриваемые в курсе утверждения и понимать роль каждого из них в общей картине. Уметь использовать утверждения для решения задач из других разделов курса, например, использовать свойства векторов для решения задач о прямых и плоскостях, использовать диагонализацию матриц для решения рекуррентных отношений. Иметь опыт конспектирования учебника для выяснения логической структуры утверждений. Иметь опыт составления доказательств в виде логически и грамматически правильных текстов.	собеседование / interview
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в	ОПК-1.1. Знает основные положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории и основную	Знать: определения и свойства операций на векторах, комплексных числах и матрицах. Знать способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Знать определение линейного оператора, его	собеседование / interview, контрольные работы / tests

области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	терминологию. ОПК-1.2. Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты. ОПК-1.3. Имеет практический опыт работы с решением стандартных математических задач и применяет его в профессиональной деятельности.	матрицы. Знать основные теоремы о линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Уметь использовать скалярное, векторное и смешанное произведения для решения задач о прямых и плоскостях. Уметь решать квадратные уравнения в комплексных числах, переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно. Уметь находить корни n-й степени из комплексных чисел. Уметь решать системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, находить фундаментальную систему решений. Уметь производить операции над матрицами, находить определители n-го порядка, ранг, образ и ядро матриц. Уметь находить собственные значения и собственные векторы матриц, приводить матрицы к диагональному виду. Уметь находить матрицы линейных операторов. Владеть навыками доказательства свойств операций над векторами, комплексными числами и матрицами. Иметь опыт решения задач про векторы, комплексные числа, матрицы, линейные операторы и линейные векторные пространства.	

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения		
	Всего	1 семестр	2 семестр
Общая трудоемкость	10 ЗЕТ	5 ЗЕТ	5 ЗЕТ
Часов по учебному плану	360	180	180
в том числе			
аудиторные занятия (контактная работа): - занятия лекционного типа - занятия семинарского типа - занятия лабораторного типа - текущий контроль (КСР)	133 64 64 5	67 32 32 3	66 32 32 2
самостоятельная работа	155	77	78
Промежуточная аттестация – экзамен	72 (экзамен)	36 (экзамен)	36 (экзамен)

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них	ятельная работа обучающ егося.

		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1 семестр / 1 semester						
1. Векторная геометрия. Прямые и плоскости / Vector geometry. Lines and planes	53	12	12		24	29
2. Комплексные числа / Complex numbers	35	8	8		16	19
3. Системы линейных уравнений / Systems of linear equations	53	12	12		24	29
Текущий контроль (КСР)	3				3	
Промежуточная аттестация — экзамен	36					
Итого 1 семестр	180	32	32		67	77
2 семестр / 2 semester						
4. Матричная алгебра / Matrix Algebra	44	10	10		20	24
5. Определители и диагонализация / Determinants and Diagonalization	36	8	8		16	20
6. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ / Vector Space $\mathbb{R}^n$	62	14	14		28	34
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация — зачет, экзамен	36					
Итого 2 семестр	180	32	32		66	78

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа включает выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением, изучение литературы и проработку теоретического материала лекционных занятий.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента находится в разделе 6. Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	**Шкала оценивания сформированности компетенций**						
	плохо	**неудовлетворительно**	**удовлетворительно**	**хорошо**	**очень хорошо**	**отлично**	**превосходно**
	Не зачтено		Зачтено				
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минималь-ных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минималь-ных умений. Невозмож-ность	При решении стандартных задач не продемонстрированы	Продемонстрированы основные умения. Решены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все	Продемонстрированы все основные умения. Решены все	Продемонстрированы все основные умения, решены все	Продемонстрированы все основные умения, решены все

	оценить наличие умений вследствие отказа обучающего-ся от ответа	основные умения. Имели место грубые ошибки.	типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	основные задачи с отдельными несущест-венным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продемонст-рированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		**Уровень подготовки**
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.2. Вопросы к экзамену

1 семестр

1. Points and vectors in 3-dimensional space, their coordinates. Vector length, its properties. Equality of vectors. (ОПК-1)
2. Geometric vectors. Intrinsic (geometric) definition of vector addition, subtraction and multiplication by a scalar. (ОПК-1)
3. Coordinates and length of a vector given by its endpoints. Coordinates of the sum and difference of two vectors. Coordinates of the product of a vector and a number. Parallel

vectors. Necessary and sufficient condition of being parallel in terms of scalar multiplication. Determining if vectors given by their coordinates are parallel, examples. (ОПК-1)

4. Triangle inequality: bounding $u \pm v$ from above and from below. (ОПК-1)
5. Dot (scalar) product defined using vector coordinates, its properties, including relationship with vector length. (ОПК-1)
6. Intrinsic definition of the dot product. Finding the angle between two vectors. What does the sign of the dot product say about the angle? Orthogonal vectors, their dot product. (ОПК-1)
7. Unit vector in the direction of a given vector. Orthogonal projection of one vector on another. (ОПК-1)
8. Direction vector of a line. Vector, parametric and symmetric equations of a line on the plane and in space. Geometric meaning of the coefficients of the equations. (ОПК-1)
9. A normal vector of a line on the plane and a plane in space. Scalar (standard) and general equations of a line on the plane and a plane in space. Geometric meaning of the coefficients of the equations. (ОПК-1)
10. Shortest distance from a point to a line on the plane and to a plane in space given by their general equations (formulas that don't require selecting a point on the line or on the plane). (ОПК-1)
11. Determinants of order 2 and 3. Definition of cross (vector) product using determinant. Properties of cross product (without proof). (ОПК-1)
12. The Lagrange identity. Length of cross product, connection with the area of parallelogram. Intrinsic definition of cross product (without the use of coordinates). Right hand rule (gimplet rule) for determining the direction of cross product. (ОПК-1)
13. Triple (mixed) product, its definition using dot and cross product. Computing triple product using determinants. Its relationship with the volume of a parallelepiped and other properties. Using triple product to determine if three vectors are parallel to the same plane. (ОПК-1)
14. Complex numbers. Definitions of addition, subtraction, multiplication, multiplicative inverse and division. Properties of addition, multiplication and division. (ОПК-1)
15. Conjugate and absolute value, their properties. Complex plane. Absolute value of the difference as the distance between two numbers on the complex plane. (ОПК-1)
16. Relationship between addition and subtraction of complex numbers and vectors. Conjugate on the complex plane. Triangle inequality: bounding $z_1 \pm z_2$ from above and from below. (УК-1, ОПК-1)
17. Polar (trigonometric) form of complex numbers. Argument, principal argument. Euler's formula (without proof). Multiplication, division of complex numbers in trigonometric form. De Moivre's theorem. (ОПК-1)
18. nth root of a complex number in trigonometric form. (ОПК-1)
19. Square roots of complex numbers in algebraic (rectangular) form, eliminating spurious values. (ОПК-1)
20. Systems of linear equations: coefficients, variables (unknowns), constant terms. Solutions, (in)consistent systems, equivalent systems. The coefficient matrix and the augmented matrix of a system. Geometric interpretation of a system with two equations and two variables, the number of solutions. (ОПК-1)
21. Elementary row operations, examples. Proof that elementary row operations are reversible. Proof that elementary row operations produce an equivalent system. (ОПК-1)
22. Row echelon form and reduced row echelon form. Algorithm for converting a matrix to (reduced) row echelon form using elementary row operations. Leading (pivot, dependent) variables and free (parameters, independent) variables. Solving systems in reduced row echelon form. Solving systems in row echelon form by back-substitution. (ОПК-1)
23. Uniqueness of reduced row echelon form (without proof). Lack of uniqueness of row echelon form. Rank of a matrix. Number of solutions to a consistent system of equations

depending on the rank and size of its coefficient matrix. The Rouché--Capelli theorem. (УК-1, ОПК-1)

24. Homogeneous systems. Trivial and nontrivial solutions. Linear combinations of vectors. Proof that linear combination of solutions is a solution. Representing general solution to a homogeneous system as a linear combination of basic solutions. (УК-1, ОПК-1)
25. Matrix addition and multiplication by a scalar, their properties. (ОПК-1)
26. Transpose of a matrix, its properties. Symmetric matrices. (ОПК-1)
27. Matrix-vector multiplication, its properties. Representing a system of linear equations as a single matrix equation. (ОПК-1)
28. Nonhomogeneous systems and their associated homogeneous systems. Representing general solution to a nonhomogeneous system as a sum of a particular solution and a general solution to the corresponding homogeneous system. (УК-1, ОПК-1)

2 семестр

1. Vector spaces, its axioms and their corollaries. (УК-1, ОПК-1)
2. Necessary and sufficient conditions of being a subspace of a vector space. (УК-1, ОПК-1)
3. Span of a set of vector, its properties. (УК-1, ОПК-1)
4. Basis of a vector space, equivalent definitions. (УК-1, ОПК-1)
5. Dimension of a vector space, its independence of basis. (УК-1, ОПК-1)
6. Vector coordinates, their uniqueness. (УК-1, ОПК-1)
7. Matrices. Addition and multiplication by a number; their properties. (ОПК-1)
8. Matrix multiplication. (ОПК-1)
9. Elementary matrices. (ОПК-1)
10. Using elementary matrices to find the inverse of a matrix. (УК-1, ОПК-1)
11. Determinant. Expansion by row and by column. (ОПК-1)
12. Properties of determinant. (УК-1, ОПК-1)
13. Finding matrix inverse using cofactors. (ОПК-1)
14. Matrix rank. (УК-1, ОПК-1)
15. Change of basis. (ОПК-1)
16. Linear transformation, its matrix. (ОПК-1)
17. Matrix of a linear transformation in a different basis. (УК-1, ОПК-1)
18. Image and kernel of a linear transformation. (ОПК-1)
19. Eigenvalues and eigenvectors of a linear transformation. (УК-1, ОПК-1)
20. Matrix diagonalization. (УК-1, ОПК-1)

5.2.3. Задачи на проверку ОПК-1

1. In an orthonormal coordinate system vector v has coordinates $(-1, 5, -2)$ and vector w has coordinates $(3, 1, 1)$. Find the following.
   - The coordinates of $v - w$.
   - The coordinates of $\frac{v}{|v|}$.
   - $\left|\frac{1}{2}(v + w)\right|$.
2. In a parallelogram $ABCD$ point K lies on AD so that $AK = \frac{1}{3}AD$. Point T lies on AB so that $AT = \frac{1}{2}AB$. Point L lies on AC so that $AL = \frac{1}{5}AC$. Let vector a equal $\overrightarrow{AD}$ and vector b equal $\overrightarrow{AB}$. Express $\overrightarrow{KL}$ and $\overrightarrow{LT}$ through a and b.
   Prove that $\overrightarrow{KL}$ and $\overrightarrow{LT}$ are collinear.
3. Vectors p, q, s and t satisfy the following conditions: $s = p + q$, $t = 2p + q$, $|s| = \sqrt{3}$, $|t| = 2$, and the angle between s and t is $\pi/6$. Find the cosine of the angle between p and q.
4. The following points are given: $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, -1)$, $C(2, 1, 0)$ and $D(3, -1, \lambda)$. For which values of λ all four points lie on the same plane?
5. Find the area of the triangle built on vectors a and b if $a = p + 2q$, $b = p - q$, $|p| = 4$, $|q| = 2$ and the angle between p and q is $\pi/6$.

6. Calculate $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$.
7. Prove that $|z^2 - z + i| < 3$ if $|z| < 1$.
8. Simplify the following number using trigonometric form: $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{12} - (1+i\sqrt{3})^6}{(i-1)^{12}}$.
9. Find the set of points z for which $\arg(-iz^2) = \dfrac{\pi}{6}$ and plot it on the complex plane.
10. Solve the equation $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$ and verify that your answers are correct.
11. Solve the following system of linear eqation and write solutions as a linear combination of basic solutions.

$$\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 + 6x_3 + 15x_4 - 19x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 11x_4 - 13x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

12. Solve the following matrix equations for *X*. Find the inverse of the required matrix using elementary row operations. Check that the *X* you found satisfies the original equation.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -8 & 4 \\ -15 & -3 & 2 & -7 \\ -35 & -15 & -9 & -1 \\ 5 & 22 & -16 & 9 \end{pmatrix}$$

13. Using the cofactor expansion, find the determinant of the following matrix *A*. Also find the adjugate matrix adj(*A*) and verify that *A*·adj(*A*) = det(*A*).

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 7 \\ 8 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Evaluate the determinant of the following matrix by reducing it to upper triangular form using elementary row operations.

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & 7 & -1 \\ -4 & -5 & 4 & -5 \\ -9 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

15. Find the rank of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & -9 & 9 & 6 \\ 7 & -4 & -5 & -2 & 4 \\ -7 & 3 & 5 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

16. Find the characteristic polynomial, the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the following matrix *A*.

$$\begin{pmatrix} 12 & -15 & -15 \\ 5 & -8 & -5 \\ 5 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Is this matrix diagonalizable? If yes, find matrices C and D such that and $C^{-1}AC = D$ and D is a diagonal matrix. If the matrix is not diagonalizable, prove it.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
а) Основная литература

Greub, Werner H., Linear Algebra, Graduate Texts in Mathematics (4th ed.), Springer
http://www.springer.com/br/book/9780387901107

б) Интернет-ресурсы
1. https://unnalg2019.wordpress.com
2. http://www.uic.unn.ru/~zny/algebrae/Lectures/algebrae.pdf

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО /ОС ННГУ _____.

Автор программы: Ph.D., ст. преп. Макаров Е.М.

Зав. кафедрой АГДМ д.ф.-м.н., проф. Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30.11.2022 года, протокол № 3.