

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

**Теория вероятностей и математическая
статистика**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 г.

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части.

Код дисциплины **Б1.О.21.**

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.21 «Вероятностные модели» относится к обязательной части ООП направления подготовки <i>01.03.02 Прикладная математика и информатика</i> .

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.: Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: - общие вопросы о мировоззренческих взглядах на случайные явления и на функционирование процессов в условиях неопределенностей; 1) предмет теории вероятностей; 2) основы аксиоматического подхода при изучении реальных статистически устойчивых экспериментов; 3) методы математического описания количественных показаний различных измерителей результатов статистически устойчивого эксперимента; 4) вероятностные свойства одномерных и многомерных случайных величин; 5) числовые характеристики одномерных и многомерных случайных величин; 6) различные типы зависимостей между случайными величинами; 7) простейшие типы предельных теорем в теории вероятностей; 8) основы аппроксимации случайных величин и их законов распределения; 9) предмет математической статистики; 10) соотношение между предметом теории вероятностей и предметом математической статистики; 11) основные задачи математической статистики; 12) методы вычисления выборочных характеристик статистически устойчивого эксперимента; 13) основы теории точечного и	Тест Собеседование Контрольная работа Задача

		<p>интервального оценивания;</p> <p>14) методы проверки статистических гипотез;</p> <p>15) элементы теории случайных последовательностей и процессов.</p>	
	<p>ОПК-1.2.:</p> <p>Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p>	<p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - анализировать и использовать основы знаний теории вероятностей и математической статистики для формирования философской позиции на случайные явления, процессы и эксперименты; - обладать способностью к разработке методов изучения различных количественных характеристик реальных статистически устойчивых процессов; - понимать различные подходы предсказания случайных явлений на основе понятий сходимости последовательности случайных величин; - собирать, обрабатывать и интерпретировать статистические данные современных научных наблюдений над сложными экспериментами в условиях разного рода неопределенностей; - обладать способностью к проверке гипотезы о виде распределения с помощью критерия хи-квадрат Пирсона. 	<p>Тест</p> <p>Собеседование</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Задача</p>
	<p>ОПК-1.3.:</p> <p>Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности.</p>	<p>Владеть:</p> <p>1) методами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов, которые позволяют изучить свойства реальных процессов и явлений, функционирующих в условиях случайных факторов, неопределенностей и получения дополнительной информации;</p> <p>2) способами научного анализа экспериментальных данных, относящихся к массовым явлениям, с целью определения некоторых обобщающих эти данные характеристик, и выявление статистических закономерностей наблюдаемого процесса, для которого не все условия его проведения известны.</p>	<p>Тест</p> <p>Собеседование</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Задача</p>
<p>ОПК-3:</p> <p>Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-3.1.:</p> <p>Знает математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности и методы их модификации</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - основы современной теории вероятностей, с целью разработки и анализа моделей решаемых конкретных задач; понимать различные подходы вычисления априорных и условных вероятностей наступления случайных исходов статистически устойчивых экспериментов сложной природы; - различные способы компьютерного моделирования случайных величин различного типа; - обладать базовыми знаниями о 	<p>Тест</p> <p>Собеседование</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Задача</p>

		генераторах псевдослучайных чисел в современных языках программирования.	
ОПК-3.2.: Умеет использовать, анализировать и модифицировать математические модели в современном естествознании и технике.	Уметь: 1) строить адекватные вероятностные модели экспериментов и их количественных измерителей; 2) проводить анализ вероятностных свойств количественных характеристик элементарных исходов статистически устойчивых экспериментов; 3) применять методы моделирования типа Монте-Карло простейших ситуаций стохастического характера с использованием статистических пакетов и компьютерных технологий; 4) доказывать предельные теоремы с целью аппроксимации результатов измерений исходов экспериментов; 5) обрабатывать и анализировать экспериментальные данные; 6) исследовать простейшие марковские последовательности.	Тест Собеседование Контрольная работа Задача	
ОПК-3.3.: Имеет практический опыт применения математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности	Владеть: 1) способностью к разработке методов изучения реальных случайных процессов с не полностью известными условиями их проведения или наблюдения; 2) способностью к разработке программного обеспечения для моделирования случайных величин с различным распределением; 3) навыками интерпретации вероятностных свойств случайных экспериментов, для которых все основные условия их проведения известны; 4) навыками восстановления вероятностных свойств случайных экспериментов, для которых не все условия их проведения известны; 5) применением методов вероятностного и имитационного моделирования простейших ситуаций стохастического характера с использованием статистических пакетов и компьютерных технологий. Владеть: практическими навыками восстановления вероятностных свойств: 1) случайных экспериментов, для которых не все условия их проведения известны; 2) измерителей элементарных исходов случайных экспериментов, для которых не все условия их проведения известны.	Тест Собеседование Контрольная работа Задача	

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	82
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- занятия лабораторного типа	16
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	26
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Последовательности случайных величин и предельные теоремы. Различные виды сходимостей последовательности случайных величин (сходимость по вероятности, сходимость почти всюду, сходимость в среднем, сходимость по распределению). Первая лемма Бореля–Кантелли. Связь между различными типами сходимостей. Классификация предельных теорем. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Закон больших чисел в форме Чебышева. Усиленный закон больших чисел и теорема Бернулли. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова.	16	6	6	0	12	4
Тема 2. Элементы математической статистики. Предмет математической статистики и ее связь с теорией вероятностей. Прикладные задачи математической статистики. Основные понятия математической статистики: наблюдаемая совокупность статистически устойчивого эксперимента, генеральная совокупность, выборочная совокупность, статистический и вариационный ряды, информационная статистическая таблица. Статистические (эмпирические) законы распределения случайных величин. Статистические (выборочные) числовые характеристики измерителей исходов статистически устойчивого эксперимента.	26	6	6	10	22	4
Тема 3. Точечное оценивание неизвестного параметра. Понятие оценки неизвестного параметра. Основные требования для оценок неизвестного параметра (несмещённость, состоятельность, эффективность).	16	6	6	0	12	4

Характеристика точности и надежности оценки неизвестного параметра. Неравенство Рао–Крамера и критерий эффективности оценок. Методы построения оценок для неизвестных параметров законов распределения случайных величин: минимума хи-квадрат, максимального правдоподобия, моментов.						
Тема 4. Интервальное оценивание неизвестного параметра. Определение доверительного интервала. Построение доверительного интервала с использованием точечной оценки параметра. Построение доверительного интервала с помощью центральной статистики. Построение доверительного интервала в случае, когда неизвестный параметр является математическим ожиданием, дисперсией или вероятностью случайного события.	16	6	6	0	12	4
Тема 5. Проверка статистических гипотез. Распределение Пирсона (хи-квадрат распределение). Статистические гипотезы и критерий согласия для полностью известного гипотетического распределения случайной величины. Теорема Пирсона. Критерий согласия хи-квадрат в случае, когда необходимо оценивать неизвестные параметры закона распределения случайной величины. Теорема Фишера–Пирсона. Пример Бартлетта о построении вероятностной модели потока автомобилей на магистрали. Критерий Колмогорова о согласованности теоретической функции распределения и статистической функции распределения.	24	6	6	6	18	6
Тема 6. Элементы теории случайных процессов. Определение случайных процессов и способы их задания. Классификация случайных процессов. Марковские цепи со счетным числом состояний. Классификация состояний марковской цепи по Колмогорову и основная предельная теорема марковских цепей. Процессы обслуживания. Управление конфликтными потоками.	8	2	2	0	4	4
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен	36					
Итого	144	32	32	16	82	26

Практические занятия (лабораторные работы) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Практическая подготовка предусматривает: изучение методов моделирования случайных величин с заданным законом распределения дискретного и непрерывного типов, основ статистических методов построения выборочных распределений и выборочных числовых характеристик случайных величин, критерия для проверки гипотезы о виде распределения и разработку программного комплекса.

На проведение практических занятий (лабораторных работ) в форме практической подготовки отводится 16 часов.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: разработка, отладка, проверка работоспособности, модификация программного обеспечения на основе анализа математических моделей различных естественнонаучных, информационных процессов;

- компетенций - ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности (ОПК-3.3: Имеет практический опыт применения математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности).

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа, лабораторного типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся.

Предусмотрены консультации по лекционному курсу и по практике. Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам и монографиям, указанным в списке литературы раздела 6. Самостоятельная работа также заключается в решении практических задач, проектов и выполнении ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях на компьютере, используя электронный дистанционный учебный материал по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Самостоятельная работа контролируется преподавателем как во время аудиторных занятий, так и во время внеаудиторной работы, в том числе с использованием консультаций по электронной почте.

Самостоятельная работа в рамках лабораторных занятий включает в себя ознакомление с теоретическим материалом по методическому пособию, указанному в списке литературы раздела 6 (основная литература, [7]), разработку программного комплекса по полученному варианту лабораторных заданий, выполнение ответов на вопросы самоконтроля.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	я от ответа						
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Типовые вопросы и задачи для подготовки к экзамену по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Сформулировать основное отличие случайных величин от функций, которые рассматриваются в курсе математического анализа.	ОПК-1
2. Перечислить основные законы распределения дискретных, непрерывных, сингулярных и смешанных случайных величин.	ОПК-1
3. Пусть (Ω, \mathcal{F}) есть теоретико-множественная модель произвольного статистически устойчивого эксперимента E и A – некоторое случайное событие из \mathcal{F} . Рассмотрим отображение $\xi(\omega): \Omega \rightarrow R$, которое принимает значение единица при $\omega \in A$ и значение ноль при $\omega \notin A$. Доказать, что функция $\xi(\omega): \Omega \rightarrow R$, которую называют индикатором события A и обозначают через символ $I_A(\omega)$, является случайной величиной. Найти все вероятностные законы распределения случайной величины $I_A(\omega)$.	ОПК-3
4. Какие законы распределения используются для выборочного коэффициента корреляции с целью проверки гипотезы о статистической значимости линейной связи между случайными величинами?	ОПК-3
5. Как используются точечные и интервальные оценки измерителей для проверки гипотезы о наличии статистической связи между случайными величинами?	ОПК-3

5.2.2. Типовые вопросы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», которые необходимы для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции

Вопросы:	Код компетенции (согласно РПД)
1. Объясните главную причину, которая выделяет нормальный закон среди других законов непрерывного типа. Приведите формулировку правила «трёх сигм» и поясните его практическое значение.	ОПК-1
2. Дать интерпретацию предельной теоремы Бернулли в связи с понятием статистической устойчивости случайного эксперимента. В чём заключается основное значение центральных предельных теорем Линдеберга—Леви и А.М. Ляпунова?	ОПК-1
3. В чём заключается отличие центральных предельных теорем Линдеберга — Леви и А.М. Ляпунова?	ОПК-3
4. Определить закон распределения суммы двух независимых и равномерно распределённых на отрезке $[0, 1]$ случайных величин.	ОПК-3
5. Используя аппарат характеристических функций, доказать центральную предельную теорему А.М. Ляпунова.	ОПК-3
6. Определить закон распределения суммы двух независимых и равномерно распределённых на отрезке $[0, 1]$ случайных величин.	ОПК-3

5.2.3. Типовые вопросы при собеседовании и типовые контрольные работы для оценки сформированности компетенций ОПК-1, ОПК-3

Вопросы:	Код компетенции (согласно РПД)
----------	--------------------------------

1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n суть результаты n независимых повторных наблюдений над случайной величиной ξ , распределенной по закону Пуассона с неизвестным параметром $\theta > 0$. Для оценки θ выбрали функцию вида $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ от результатов наблюдений. Определить, являются ли эта оценка несмещенной.	ОПК-1
2. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n суть результаты n повторных независимых наблюдений над случайной величиной ξ , интегральная функция распределения которой $F(x; \theta)$ известна с точностью до параметра $\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. И пусть оценка $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ есть несмещенная оценка для θ , причем $D(\theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) < \infty$. Определить, является ли $(\theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))^2$ несмещенной оценкой θ^2 .	ОПК-1
3. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — результаты n повторных независимых наблюдений над случайной величиной ξ , функция распределения которой $F(x; \theta_1, (\theta_2)^2)$ известна с точностью до параметров θ_1 и θ_2 , где $\theta_1 = M\xi, (\theta_2)^2 = D\xi$. Для оценки параметра θ_2 выбрали функцию вида	ОПК-1
$\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = (n-1)^{-1/2}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]^{1/2},$ <p>где величина $\bar{x} = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Определить, является выбранная оценка параметра θ_2 несмещенной.</p>	ОПК-3
4. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — результаты n повторных независимых наблюдений над нормальной случайной величиной ξ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией $\theta = D\xi$. В качестве оценки параметра θ выбрана статистика вида $\theta_n'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = n^{-1}[(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + \dots + (\xi_n)^2]$. Определить, является ли данная оценка эффективной.	ОПК-3
5. Методом моментов найти оценку неизвестных параметров $\theta_2 > \theta_1$ случайной величины ξ , плотность распределения $f_\xi(x; \theta_1, \theta_2)$ которой равна нулю при $x \notin (\theta_1, \theta_2)$ и равна величине $(\theta_2 - \theta_1)^{-1}$ при $x \in (\theta_1, \theta_2)$.	ОПК-3
Методом моментов найти оценку неизвестных параметров θ_1 и $0 < \theta_2 < 1$ непрерывной случайной величины ξ , плотность распределения $f_\xi(x; \theta_1, \theta_2)$ которой определяется формулой $\theta_2 f_1(x) + (1 - \theta_2) f_1(x - \theta_1)$, где $f_1(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\}$.	

5.2.4. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенций ОПК-1, ОПК-3.

Правильные ответы приведены или помечены символом (+).

1. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является одномерной случайной величиной на (Ω, \mathcal{F}) . Определить соотношение между событиями, которое является ошибочным.

- Событие $\{\omega: \xi(\omega) \geq a\} = \Omega \setminus \{\omega: \xi(\omega) < a\}$.
- Событие $\{\omega: \xi(\omega) > a\} \neq \Omega \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a + 1/i\} \right)$. (+)
- Событие $\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$.
- Событие $\{\omega: \xi(\omega) = a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a + 1/i\} \setminus \{\omega: \xi(\omega) < a\}$.

2. Пусть $c \in \mathbb{R}$ и $\xi(\omega), \eta(\omega)$ являются случайными величинами. Определить утверждение, которое будет ошибочным.

- Функция $c\xi(\omega)$ является случайной величиной.
- Функция $c(\xi(\omega) + \eta(\omega))$ является случайной величиной.
- Функция $c(\xi(\omega) - \eta(\omega))$ является случайной величиной.
- Функция $|\xi(\omega)|$ не является случайной величиной. (+)

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения случайной величины ξ . Определить правильные соотношения.

- Имеет место соотношение $F(+\infty) \neq 1$.

- Имеет место соотношение $F(-\infty) = 0$. (+)
- Имеет место соотношение $F(+\infty) = 1$. (+)
- Имеет место соотношение $F(-\infty) \neq 0$.

4. Тип — проверка ответов.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения сингулярной случайной величины $\xi(\omega): \Omega \rightarrow [0,1]$. Вычислить значение функции $F(x)$ при: 1) $x = 10/27$; 2) $x = 20/27$; 3) $x = 22/27$.

Ответ для задачи 1): $F(10/27) = 1/2$;

ответ для задачи 2): $F(20/27) = 5/8$;

ответ для задачи 3): $F(22/27) = 3/4$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний, для которой $p_{ij}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j . Определить справедливое высказывание.

- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{j,i}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такие целые числа $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$, что одновременно $p_{i,j}(n_1) > 0$ и $p_{j,i}(n_2) > 0$. (+)

Состояние с номером i назовём несущественным, если существуют такое состояние с номером j и натуральное число r , что $p_{i,j}(r) > 0$.

5.2.5. Типовые задачи, выносимые на экзамен по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», для оценки сформированности компетенций ОПК-1 и ОПК-3

ЗАДАЧА № 1

В системе координат XOY нарисованы прямоугольник $\Pi = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$, квадрат $K = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ и фигура Φ , ограниченная линиями: $y = x^2$, $y = 4$. В прямоугольник наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она попадет либо на квадрат K , либо на фигуру Φ .

Ответ: искомая вероятность равна $11/28$.

ЗАДАЧА № 2

В крупный маркет с 13 до 15 часов, равновозможно в любой момент времени из этого интервала, должны подойти два фургона с продуктами. В зависимости от ситуации первый из них может занимать место разгрузки либо 30 минут с вероятностью 0.4, либо 45 минут с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что второму фургону придется ожидать освобождения места разгрузки, но не более 15 минут.

Ответ: искомая вероятность приблизительно равна 0,092.

ЗАДАЧА № 3

Стрелок, имея 4 патрона, производит выстрелы по мишени до первого попадания в нее или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле, независимо от других, равна величине $\frac{1}{3}$. Пусть случайная величина ξ определяет число израсходованных патронов. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(2 < \xi \leq 4)$ двумя способами: а) через ряд распределения, б) через функцию распределения.

Ответ: искомая вероятность равна $4/9$.

ЗАДАЧА № 4

Найти закон распределения вероятностей случайной величины $\eta = \xi_1 - \xi_2$, если (ξ_1, ξ_2) – двумерная непрерывная случайная величина, имеющая двумерную плотность распределения вероятностей вида $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Ответ: функция распределения вероятностей случайной величины η равна

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 2^{-1} \exp\{y\} & \text{при } y \leq 0, \\ 1 - 2^{-1} \exp\{-y\} & \text{при } y > 0 \end{cases}$$

и плотность вероятностей случайной величины η равна $f_{\eta}(y) = 2^{-1} \exp\{-|y|\}$ при $y \in R$.

ЗАДАЧА № 5

В лотерее участвуют 500 человек. Условия лотереи таковы, что каждый из её участников, покупая билет за 100 рублей, может с вероятностью 0.008 выиграть приз стоимостью 10000 рублей. Найти вероятность того, что а) организаторы лотереи получат прибыль; б) убытки организаторов составят 10000 рублей; в) вычислить также среднюю прибыль данной лотереи.

Ответ: а) вероятность того, что организаторы лотереи получают прибыль, равна 0,62884;

б) вероятность того, что убытки организаторов составят 10000 рублей, равна 0,1042;

в) значение средней прибыли данной лотереи равно 10000.

5.2.6. Описание лабораторного практикума для оценки сформированности компетенции ОПК-3

Лабораторный практикум предусмотрен по двум темам дисциплины и носит название «Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения». Теоретический материал для выполнения заданий практикума изучается студентом по следующему пособию:

Зорин А. В., Зорин В. А., Федоткин М. А. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. ([Фонд образовательных электронных ресурсов: http://www.unn.ru/books/met_files/modelirovanie_s_v.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/modelirovanie_s_v.pdf))

Студент получает номер варианта и выполняет три части лабораторной работы. Образцы заданий по трем частям представлены в пункте 5.2.7.1., а образцы вариантов описаны в пункте 5.2.7.2. После самостоятельной разработки компьютерной программы по каждой из частей лабораторной работы студент в диалоге с преподавателем студент проверяет правильность выполненного задания. Кроме того, студент проходит собеседование по дополнительным вопросам, примеры которых представлены в пункте 5.2.7.3.

Выполнение заданий лабораторного практикума является необходимым условием для допуска к экзамену. Таким образом, в случае невыполнения заданий лабораторного практикума студент автоматически получает оценку «Плохо».

5.2.6.1. Образцы заданий лабораторного практикума для оценки сформированности компетенции ОПК-3

Задание по первой части работы.

1. Получить номер варианта от преподавателя и ознакомиться с текстом задачи в Приложении.

2. Изучить теоретический материал части 1 и выбрать подходящий способ решения задачи.

3. Написать первую часть программы — «розыгрыш» значений случайной величины. Эта часть должна включать в себя отображение содержания задачи, пользовательский интерфейс для ввода необходимых параметров, вывод результатов.

Если случайная величина дискретна, её различные значения $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ должны быть сведены в таблицу следующего вида:

y_i	y_1	y_2	\dots	y_k
n_i	n_1	n_2	\dots	n_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	\dots	$\frac{n_k}{n}$

Здесь $n_j = \text{число}\{x_i: x_i = y_j, i = 1, 2, \dots, n\}$

Для непрерывной случайной величины значения требуется расположить в порядке возрастания: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Здесь $x_{(j)}$ — j -е по возрастанию число среди наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n .

5.2.6.2. Образцы вариантов лабораторных работ для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1. Передаётся n сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью p независимо от других искажается. С.в. η — число искажённых сообщений.
2. При каждом цикле обзора радиолокатора объект (независимо от других циклов) обнаруживается с вероятностью p . С.в. η — число циклов обзора до обнаружения объекта.
3. ЭВМ генерирует последовательность чисел до получения некоторого заданного числа. Вероятность генерации этого числа на каждом шаге независимо от других шагов равна p . С.в. η — число элементов полученной последовательности.

5.2.6.3. Образцы вопросов собеседования при проверке корректности выполнения лабораторного практикума для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1. Укажите тип и распределение моделируемой случайной величины.
2. Опишите способ моделирования случайной величины
3. Какой датчик генерации псевдослучайных чисел был использован? Как происходит его инициализация?
4. Как были получены значения теоретических числовых характеристик случайной величины?
5. Проведите серию экспериментов объема 5, 500, 50000 экспериментов. Как изменяется разность между теоретическими и выборочными числовыми характеристиками?

5.2.7. Список примерных вопросов для контроля самостоятельной работы студентов по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» при оценке сформированности компетенций ОПК-1, ОПК-3

1. Указать условия, когда можно пользоваться предельными теоремами Муавра–Лапласа, Пуассона.
2. Дать геометрическую интерпретацию понятия сходимости по вероятности и с вероятностью единица последовательности случайных величин.
3. Дать интерпретацию предельной теоремы Бернулли в связи с понятием статистической устойчивости случайного эксперимента.
4. Вероятность рождения мальчика примем равной 0,5. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных детей будет: 1) 50 мальчиков; 2) 40 мальчиков; 3) от 40 до 60 мальчиков.
5. В чем заключается основное значение центральной предельной теоремы А.М. Ляпунова?
6. Как соотносится предмет теории вероятностей и предмет математической статистики? Приведите примеры построения статистической структуры.
7. Перечислите основные задачи математической статистики.
8. Укажите способы представления выборочных значений.
9. Приведите формулы для вычисления эмпирических характеристик случайной величины.
10. Доказать, что статистика $\theta_n^* = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ является эффективной оценкой для неизвестного параметра $\theta > 0$ пуассоновского распределения вида $P(\{\omega: \xi(\omega) = m\}) = (m!)^{-1} \theta^m \exp\{-\theta\}$, $m = 0, 1, \dots$
11. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n суть результаты n независимых повторных наблюдений над пуассоновской случайной величиной с неизвестным параметром $\theta > 0$. Для оценки θ выбрали функцию вида $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ от результатов наблюдений. Определить, являются ли эта оценка несмещенной.
12. Показать, что статистическое математическое ожидание является несмещенной оценкой для неизвестного математического ожидания случайной величины.
13. Показать, что статистическая дисперсия является смещенной оценкой для неизвестной дисперсии случайной величины, если математическое ожидание случайной величины неизвестно.
14. Показать, что статистическая дисперсия является асимптотически несмещенной оценкой для неизвестной дисперсии случайной величины, если математическое ожидание случайной величины неизвестно.
15. Показать, что статистическое математическое ожидание является состоятельной оценкой для неизвестного математического ожидания случайной величины.
16. Что понимается под доверительным интервалом заданного уровня надежности при оценке неизвестного параметра распределения?
17. Построить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной дисперсии.
18. Построить доверительный интервал для неизвестной дисперсии нормально распределенной случайной величины при известном математическом ожидании.
19. Построить доверительный интервал для неизвестной вероятности некоторого случайного события.
20. Что такое простая и сложная гипотезы?
21. Что понимается под статистическим критерием?
22. Опишите критерии согласия Колмогорова и χ^2 Пирсона о виде закона распределения.
23. Как применяется статистика χ^2 Пирсона для проверки простой гипотезы о виде закона распределения?
24. Как применяется статистика χ^2 Пирсона для проверки сложной гипотезы о виде закона распределения?
25. Как применяется критерии согласия Колмогорова для проверки гипотезы о виде закона распределения?
26. Перечислить способы задания случайных процессов.
27. Дать классификацию случайных процессов.

28. Пусть последовательность ξ_1, ξ_2, \dots составлена из независимых случайных величин и $P(\{\omega: \xi_n = i\}) = p_i$ для всех $n, i = 1, 2, \dots$. Доказать, что последовательность $\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots$ является марковской.
29. Определить общую матрицу переходных вероятностей целочисленного блуждания частицы на действительной прямой.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Федоткин М.А. Лекции по анализу случайных явлений. — Учебник. М.: Наука – Физматлит, 2016. 464 с. (250 экз.).
2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. — Учебник. М.: Наука – Физматлит, 2012. 608 с. (250 экз.).
3. Свешников А.А. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. – Санкт Петербург. Лань. 2012. 471 с. (350 экз.).
4. Ширяев А.Н. Вероятность – 1, 2. – М.: МЦНМО, 2011. 907 с. (200 экз.).
5. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. — Учебник. М.: Высшая школа, 2006. 368 с. (250 экз.).
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. 448 с. (300 экз.).
7. Зорин А. В., Зорин В. А., Федоткин М. А. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. ([Фонд образовательных электронных ресурсов: http://www.unn.ru/books/met_files/modelirovanie_s_v.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/modelirovanie_s_v.pdf))

б) дополнительная литература:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с. (100 экз.).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – М.: Гардарики, 1998. 328 с. (100 экз.).
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Академия, 2003. 576 с. (300 экз.).
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высшая школа. 1992. 304 с. (100 экз.).
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. 119 с. (100 экз.).
6. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. 648 с. (100 экз.).
7. Прохоров А.В. и др. Задачи по теории вероятностей. – М.: Наука, 1986. 328 с. (100 экз.).
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. – М.: Мир, 1984. Т. 1, 528 с. Т. 2, 738 с. (300 экз.).

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

- 1) Интернет-ресурсы электронного портала Института ИТММ;
- 2) Пакет программ «МОНТЕ» – специализированное учебно-методическое программное обеспечение, разработанное на кафедре прикладной теории вероятностей и предназначенное для имитационного моделирования случайных статистически устойчивых экспериментов;
- 3) Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные столами, стульями, учебной доской.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде, в электронных библиотеках.

Для выполнения лабораторных работ необходим компьютерный класс, оборудованный вычислительной техникой с установленным лицензионным и свободно-распространяемым программным обеспечением нужной комплектации.

Используемое лицензионное и свободное программное обеспечение:

1. ОС Microsoft Windows. Лицензия по подписке Microsoft Imagine, год продления подписки – 2016, срок подписки – 3 года, договор 39-3K-16

2. Microsoft Office 2007. Microsoft Open Licence, год покупки – 2007. Номер лицензии 42961270

3. Браузер Google Chrome. Предоставляется бесплатно на условиях лицензионных соглашений на программное обеспечение с открытым исходным кодом

4. Просмотрщик pdf-документов Adobe Reader. Бесплатное ПО (<https://get.adobe.com/ru/reader/otherversions>)

5. Антивирус Kaspersky. ПО приобретено в ноябре 2016 г для института ИТММ, ключ у сист. админ.

6. Microsoft Visual Studio. Лицензия по подписке Microsoft Imagine

7. Пакет программ «МОНТЕ» – специализированное учебно-методическое программное обеспечение, разработанное на кафедре прикладной теории вероятностей с использованием среды разработки семейства Microsoft VisualStudio (лицензия по подписке MicrosoftImagine).

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: д.ф.-м.н., проф. кафедры ТВиАД Федоткин М.А.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных: д.ф.-м.н. Зорин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.