

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Группы и алгебры Ли

Уровень высшего образования
магистратура

Направление подготовки / специальность
01.04.01 Математика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части Б1.О.11.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1. Знать принципы системного подхода, позволяющие осуществлять анализ проблемных ситуаций.	<i>Знать</i> основные методы и результаты теории групп и алгебр Ли	Собеседование
	УК-1.2 Уметь вырабатывать стратегию действий основываясь на критическом анализе проблемных ситуаций.	<i>Уметь</i> применять теоретические знания к исследованию групп и алгебр Ли	Задачи
	УК-1.3 Владеть навыками системного подхода к анализу проблемных ситуаций.	<i>Владеть</i> навыками исследования групп и алгебр Ли	Собеседование, задачи
ОПК-2 Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1 Знать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	<i>Знать</i> основы теории групп и алгебр Ли	Собеседование
	ОПК-2.2 Уметь модифицировать,	<i>Уметь</i> анализировать группы и алгебры Ли возникающие в различных	Задачи

	анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	математических моделях	
	ОПК-2.3 Владеть навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	Владеть навыками анализа групп и алгебр Ли	Собеседование, задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	<u>3</u> ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)			В том числе														Самостоятельная работа обучающегося, часы		
				Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы																
				из них																
	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Всего										
Очная			Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная			
Тема 1. Гладкие многообразия	15			2			2						4			15				
Тема 2. Группы Ли	20			6			6						12			30				
Тема 3. Алгебры Ли	20			8			8						16			30				
Текущий контроль (КСР)	1												1							
Промежуточная аттестация - зачет																				
Итого	72			16			16						33			75				

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме решения задач и опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М.: Мир, 1978.

4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

4. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине «Группы и алгебры Ли»

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач
---------------	--	---	---	--	--	--	---

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения. .

6.2.1 Контрольные вопросы

<i>вопросы</i>	<i>Код формируемой компетенции</i>
1. Найти все алгебры Ли размерности 3 над полем вещественных чисел.	ОПК-2
2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли $sl(2)$.	ОПК-2
3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над \mathbb{R} является простой бесконечномерной алгеброй Ли.	ОПК-2
4. Гладкие многообразия. Подмногообразия. Гладкие отображения.	УК-1
5. Определение и примеры групп Ли.	УК-1
6. Алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии. Ф-связанные векторные поля.	УК-1
7. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли.	УК-1
8. Алгебры Ли групп $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \cdot) .	ОПК-2
9. Алгебры Ли групп классических линейных групп.	ОПК-2
10. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.	УК-1
11. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли.	УК-1
12. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизаторы.	УК-1
13. Однородные пространства. Факторгруппа по замкнутой подгруппе.	УК-1
14. Алгебра Ли подгруппы Ли, нормальной подгруппы.	УК-1
15. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.	ОПК-2
16. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.	ОПК-2
17. Критерий Киллинга разрешимости и полупростоты.	ОПК-2
18. Корни относительно подалгебры Картана.	ОПК-2

19. Системы корней. Классификация простых комплексных алгебр Ли.	УК-1
17. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.	ОПК-2
18. Теорема Адо-Ивасава.	ОПК-2
19. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.	УК-1
20. Соответствие Ли.	УК-1

6.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции «ОПК-2»:

1. Показать, что пространство ассоциативной алгебры A является алгеброй Ли относительно произведения $[a, b] = ab - ba$.
2. Пусть A – алгебра над полем K . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли относительно коммутатора $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$.
3. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов.
4. Найти все дифференцирования алгебры многочленов, алгебры многочленов Лорана. Доказать, что над полем нулевой характеристики эти алгебры простые.
5. Пусть K – поле характеристики $p > 0$. Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов $K[x]/(x^p)$.
6. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в R^n .
7. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в R^n , $n=2m$, является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
8. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
9. Доказать, что алгебра Ли $sl(n, R)$ – простая алгебра Ли.

6.2.3 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции «ОПК-2»:

1. Найти алгебру Ли группы $GL(n, R)$, $SL(n, R)$.
2. Найти алгебру Ли группы $SO(3)$. Найти размерность группы $O(n, R)$.
3. Найти алгебру Ли группы $SU(2)$.
4. Доказательство сходимости ряда e^A . Экспоненциальное отображение на группе $GL(n, R)$.
5. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе $O(3)$.
6. Найти неприводимые представления алгебры Ли $sl(2)$.
7. Справедлива или нет теорема Ли для разрешимых алгебр Ли над произвольным полем? Привести примеры.

6.2.4 Типовые задания для оценки сформированности компетенции «УК-1»:

1. Определение гладкого многообразия. Гладкие отображения многообразий. Подмногообразие. Примеры.
2. Касательный вектор как дифференцирование в точке. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциал гладкого отображения.
3. Гладкое векторное поле. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Ф-связанные векторные поля. Распределения. Интегрируемость.
4. Определение группы Ли. Примеры. Подгруппы Ли. Гомоморфизм групп Ли.
5. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизатор точки. Ядро гомоморфизма групп Ли.
6. Однородное пространство: структура многообразия, действие группы.

7. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли. Примеры.
8. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.
9. Связные абелевы группы Ли.
10. Гомоморфизм групп Ли и соответствующий гомоморфизм алгебр Ли.
11. Присоединенное представление.
12. Подалгебры, идеалы, факторалгебры алгебры Ли. Теоремы о гомоморфизмах.
13. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.
14. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.

6.2.5 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции «УК-1»:

1. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в \mathbb{R}^n , $n=2m$, является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
2. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
3. Доказать, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ – простая алгебра Ли.
3. Найти алгебру Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$.
4. Найти алгебру Ли группы $SO(3)$. Найти размерность группы $O(n, \mathbb{R})$.
5. Найти алгебру Ли группы $SU(2)$.
6. Доказательство сходимости ряда e^A . Экспоненциальное отображение на группе $GL(n, \mathbb{R})$.
7. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе $O(3)$.
8. Вычислить группу $\pi_1(G)$, $G=SO(3)$, $SO(n)$.
9. Построить все системы корней ранга 2.

Вопросы к зачету.

Вопросы к зачету:

1. Определение гладкого многообразия. Гладкие отображения многообразий. Подмногообразие. Примеры. (УК-1)
2. Касательный вектор как дифференцирование в точке. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциал гладкого отображения. (УК-1)
3. Гладкое векторное поле. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Ф-связанные векторные поля. Распределения. Интегрируемость. (УК-1)
4. Определение группы Ли. Примеры. Подгруппы Ли. Гомоморфизм групп Ли. (УК-1)
5. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизатор точки. Ядро гомоморфизма групп Ли. (УК-1)
6. Однородное пространство: структура многообразия, действие группы. (УК-1)
7. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли. Примеры. (УК-1)
8. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты. (УК-1)
9. Связные абелевы группы Ли. (ОПК-2)
10. Гомоморфизм групп Ли и соответствующий гомоморфизм алгебр Ли. (ОПК-2)
11. Присоединенное представление. (ОПК-2)
12. Подалгебры, идеалы, факторалгебры алгебры Ли. Теоремы о гомоморфизмах. (ОПК-2)
13. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля. (ОПК-2)
14. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли. (ОПК-2)
15. Соответствие Ли между группами Ли и алгебрами Ли. Теорема Адо-Ивасава. Существование группы Ли с заданной алгеброй Ли. (ОПК-2)
16. Соответствие Ли для нормальных подгрупп. (ОПК-2)

17. Накрывающие пространства. Накрывающие топологические группы. Универсальные накрывающие.(ОПК-2)
18. Представления групп Ли и алгебр Ли.(ОПК-2)

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

б) Дополнительная литература:

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М.: Мир, 1978.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

в) Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека «Мир уравнений» (Eqworld)
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы): д.ф.-м.н., проф. Кузнецов М.И.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.