

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.  
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
решением президиума  
Ученого совета ННГУ  
от 30.11.2022 г.  
протокол № 13

**Рабочая программа дисциплины  
Work program of the course  
Комбинаторный анализ  
Combinatorial analysis**

Уровень высшего образования  
Level of higher education  
**бакалавриат**  
bachelor's degree program

Направление подготовки / специальность  
Training direction / speciality  
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии  
02.03.02 Fundamental Computer Science and Information Technology  

---

*(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)*

Направленность образовательной программы  
Orientation of educational program  
Общий профиль  
General profile  

---

*(указывается профиль / магистерская программа / специализация)*

Форма обучения  
form of study  
очная  
full-time  

---

*(очная / очно-заочная / заочная)*

Нижний Новгород, 2021 год  
Nizhni Novgorod, 2021

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина ФТД.02 «Комбинаторный анализ» относится к факультативам в ООП направления подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Дисциплина читается студентам 4 курса в 7 семестре, 1 зачетная единица, 36 часов, зачет.

Discipline ФТД.02 "Combinatorial analysis" refers to the elective disciplines.

№ вари анта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	ФТД. Факультативы	Дисциплина ФТД.02 «Комбинаторный анализ» является факультативом в ООП направления подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

## 2. Планируемые результаты обучения, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

<b>Формируемые компетенции</b> (код, содержание компетенции) /  <b>Formed competencies</b> (code, content of competence)	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции /</b> <b>Planned learning outcomes for the discipline (module), in accordance with the indicator of achievement of competency</b>		<b>Наименование оценочного средства /</b>  <b>Name of the evaluation tool</b>
	<b>Индикатор достижения компетенции</b> (код, содержание индикатора) / <b>Competency achievement indicator</b> (code, indicator content)	<b>Результаты обучения по дисциплине /</b>  <b>Learning outcomes by the discipline</b>	
<b>ОПК-1</b> <i>Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности /</i>  <i>Student is able to apply the fundamental knowledge gained in the field of mathematical and (or) natural sciences, and use them in professional activities</i>	<b>ОПК-1.1. Знает</b> <i>основные положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории и основную терминологию /</i> <i>Student knows the basic concepts and concepts in the field of mathematical and natural sciences, basic theories basic terminology</i>	<i>Знать основные понятия и утверждения дисциплины «Комбинаторный анализ», описание основных комбинаторных объектов; иметь представление о более сложных методах комбинаторики, таких, как производящие функции, метод решета /</i>  <i>Students must know main concepts and statements of Combinatorial Analysis, description of main combinatorial objects; have an idea of more complicated methods of combinatorics such as enumerating functions and sieve method</i>	<i>собеседование /</i> <i>interview</i>
	<b>ОПК-1.2. Умеет</b> <i>осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты /</i> <i>Student is able to carry out the primary collection and analysis of the material, interpret vari-</i>	<i>Уметь пользоваться базовыми методами комбинаторики (правила суммы и произведения, метод включения и исключения, раскрытие линейных рекуррентных соотношений); использовать аппарат производящих функций; применять метод решета /</i>  <i>Students must be able to use basic methods of combinatorics (sum rule, product rule, inclusion-exclusion method, solving linear recurrence equa-</i>	<i>тест /</i> <i>test</i>  <i>задачи /</i> <i>tasks</i>

	<i>ous mathematical objects</i>	<i>tions); to use the apparatus of enumerating functions; to apply sieve method</i>	
--	---------------------------------	---	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

<b>Общая трудоемкость</b>	<b>1 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>36</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>33</b>
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа	<b>16</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>3</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>	

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего, час.	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них				Самостоятельная работа, час.
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Классические комбинаторные объекты	4	2	2		4	
2. Новые комбинаторные объекты	9	4	4		8	1
3. Функциональное представление комбинаторных объектов	4	2	2		4	
4. Производящие функции	9	4	4		8	1
5. Метод решета	9	4	4		8	1
Текущий контроль (КСР)	1					
Промежуточная аттестация – зачет						
<b>Итого</b>	<b>36</b>	<b>16</b>	<b>16</b>		<b>32</b>	<b>3</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (7-й семестр, зачет).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности.

#### 4.1. Виды самостоятельной работы

- Выполнение домашних практических заданий.
- Чтение справочной, методической и научной литературы.
- Подготовка к выполнению письменных контрольных работ.
- Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

Формой контроля выполнения домашних и контрольных работ является проверка правильности их выполнения. Формой контроля работы с дополнительной литературой являются дополнительные вопросы на зачете.

#### 4.2. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

- 1) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 384 с. (42 экз.)
- 2) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 3) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 4) Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2005. 416 с. (Изд. 1-е: Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. 368 с.) (150 экз.)
- 5) Сборник задач по дискретной математике. Электронное учебно-методическое пособие. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Н.Новгород, ННГУ, 2012. 80 с.  
[http://www.unn.ru/books/met\\_files/alekseev.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/alekseev.pdf)

### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

#### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Индикаторы компетенции	Оценка сформированности компетенций						
	не зачтено		зачтено				
Знания	отсутствие знаний материала	наличие грубых ошибок в основном материале	знание основного материала с рядом негрубых ошибок	знание основного материала с рядом заметных погрешностей	знание основного материала с незначительными погрешностями	знание основного материала без ошибок и погрешностей	знание основного и дополнительного материала без ошибок
Умения	полное отсутствие умений	недостаточно умений	умение использовать отдельные приемы при наличии существенных ошибок	умение использовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок	умение использовать отдельные приемы	умение использовать приемы	умение использовать приемы и способность принимать решение на этой основе
Навыки	полное отсутствие навыков	отсутствие навыков	наличие минимальных навыков	посредственное владение навыками	достаточное владение навыками	хорошее владение навыками	всестороннее владение навыками

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
Зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Классические комбинаторные объекты. Перестановки (подстановки), подмножества. Биномиальная формула, сумма биномиальных коэффициентов, симметрия и унимодальность. Рекуррентные соотношения для биномиальных коэффициентов.	ОПК-1
2. Новые комбинаторные объекты. Перестановки заданного мультимножества.	ОПК-1
3. Разбиение чисел. Упорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.	ОПК-1
4. Разбиение чисел. Упорядоченные разбиения на любое число слагаемых.	ОПК-1
5. Разбиение чисел. Неупорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.	ОПК-1
6. Разбиение чисел. Неупорядоченные разбиения на любое число слагаемых.	ОПК-1
7. Разбиение множеств. Неупорядоченные разбиения на заданное число блоков.	ОПК-1
8. Разбиение множеств. Неупорядоченные разбиения на любое число блоков.	ОПК-1
9. Разбиение множеств. Упорядоченные разбиения.	ОПК-1
10. Разбиения подстановок на циклы.	ОПК-1
11. Функциональное представление комбинаторных объектов. Типы функций и различимость элементов. Таблица комбинаторных объектов.	ОПК-1

12. Производящие функции. Общая теория линейных однородных рекуррентных соотношений.	ОПК-1
13. Производящие функции. Системы линейных однородных рекуррентных соотношений.	ОПК-1
14. Производящие функции. Неоднородные рекуррентные соотношения.	ОПК-1
15. Производящие функции. Примеры линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами.	ОПК-1
16. Производящие функции. Пример решения нелинейного рекуррентного соотношения (числа Каталана).	ОПК-1
17. Производящие функции. Подсчет числа специализированных мультимножеств.	ОПК-1
18. Производящая функция для разбиений чисел.	ОПК-1
19. Экспоненциальные производящие функции. Их использование для нахождения перестановок специализированных мультимножеств.	ОПК-1
20. Производящие функции чисел Стирлинга 2-го рода и чисел Белла.	ОПК-1
21. Производящие функции чисел Стирлинга 1-го рода.	ОПК-1
22. Метод решета. Подсчет числа беспорядков.	ОПК-1
23. Метод решета. Подсчет числа булевых функций без фиктивных переменных.	ОПК-1
24. Метод решета. Подсчет количества простых чисел из заданного диапазона.	ОПК-1
25. Метод решета. Нахождение функции Эйлера (количества чисел, не превосходящих заданного числа и взаимно простых с ним).	ОПК-1
26. Метод решета. Его применение к вычислению перманентов.	ОПК-1

### 5.2.2. Типовые контрольные задания для оценки сформированности компетенций

#### Контрольные работы для оценивания результатов обучения в виде умений и владений (ПК-1)

Типовая контрольная работа содержит несколько заданий и оценивается по семибалльной системе. За каждое правильно выполненное задание без недочетов дается 1 балл, за правильно выполненное задание с недочетом – 0,5 балла. За невыполненное задание или неправильно выполненное задание баллы не начисляются. Полученные баллы суммируются, и определяется % выполнения контрольного задания по формуле  $(100s)/n$ , где  $n$  – общее число заданий и  $s$  – сумма набранных баллов. Оценка за контрольное задание определяется следующим образом:

% выполнения	Оценка
100%	Превосходно
90 – 99%	Отлично
80 – 89 %	Очень хорошо
70 – 79 %	Хорошо
50 – 69 %	Удовлетворительно
20 – 49 %	Неудовлетворительно

<20 %	Плохо
-------	-------

### Пример контрольной работы по основным и новым комбинаторным объектам

#### **Вариант № 1**

1. Сколько существует решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  при заданных  $n$  и  $k$ , если все  $x_i$  равны 0 или 1? (Конкретный пример:  $n=10, k=5$ ).
2. Сколько существует решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  при заданных  $n$  и  $k$ , если все  $x_i$  – целые неотрицательные числа? (Конкретный пример:  $n=6, k=5$ ).
3. Сколько существует решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  при заданных  $n$  и  $k$ , если все  $x_i$  – натуральные числа? (Конкретный пример:  $n=5, k=10$ ).
4. Сколько существует матриц из  $m$  строк,  $n$  столбцов с элементами из множества  $\{0, 1\}$ , у которых все строки различны?
5. Сколько существует упорядоченных разбиений натурального числа  $k$  на  $n$  натуральных слагаемых? Каково число аналогичных упорядоченных разбиений? (Конкретный пример:  $n=4, k=8$ ).
6. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности  $k$  на  $n$  непустых блоков? (Конкретный пример:  $n=5, k=7$ ).
7. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности  $k$  на любое число непустых блоков? (Конкретный пример:  $k=6$ ).
8. Вычислите  $\binom{1/2}{k}$ . (Конкретный пример:  $k=5$ ).

### Пример контрольной работы по производящим функциям и рекуррентным соотношениям

#### **Вариант № 1**

1. Постройте производящую функцию для мультимножеств в универсе  $\{0,1,2\}$ , в которых элемент  $i$  входит любое число раз  $k \equiv i \pmod{3}$ . Найдите количество таких мультимножеств мощности 0, 3 и 9, выпишите все соответствующие мультимножества.
2. Какая числовая последовательность порождается производящей функцией  $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ ?
3. Раскройте линейную рекуррентность  $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ , если  $a_1 = 1, a_2 = 1$ .
4. Сколько существует евклидово неизоморфных деревьев с  $m$  ребрами? (Конкретные примеры:  $m=3, m=5$ ).

### Пример контрольной работы по методу решета

#### **Вариант № 1**

1. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы слова ТАРАКАН?
2. В группе переводчиков из 13 человек каждый знает хотя бы один из трех языков – английский, немецкий, французский. При этом
  - английский язык знают 10 переводчиков,
  - немецкий язык знают 7 переводчиков,
  - французский язык знают 6 переводчиков,
  - английский и немецкий знают 5 переводчиков,
  - английский и французский знают 4 переводчика,
  - немецкий и французский знают 3 переводчика.
 Сколько переводчиков знают все три языка?  
 Сколько переводчиков знают в точности два языка?  
 В точности один язык?



3. Сколько существует натуральных чисел  $\leq n$ , взаимно простых с  $n$ ? (Конкретный пример:  $n = 100$ ).

4. Сколько делителей существует у натурального числа  $n$ ? (Конкретный пример:  $n = 100$ ).

5. Какие перестановки называются беспорядками? Сколько существует беспорядков из  $n$  элементов? (Конкретный пример:  $n = 6$ ).

6. Вычислите перманент матрицы 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Подсчитайте количество булевых функций от четырех переменных, у которых все переменные являются существенными.

### 5.2.3. Образцы тестовых заданий для оценивания результатов обучения в виде знаний (ПК-1)

#### Вариант 1

1. Что из перечисленного ниже является синонимом слова СОЧЕТАНИЕ ?

1) подмножество    2) кортеж    3) разбиение    4) независимый цикл

2. Чему равно число размещений из 6 по 3?

1) 10    2) 20    3) 60    4) 120

3. Чему равно число сочетаний с повторениями из 3 по 5?

1) 0    2) 1    3) 10    4) 21

4. Граф имеет  $n$  вершин и  $m$  ребер. Сколько у него различных остовных подграфов?

1)  $2^n$     2)  $2^m$     3)  $m + n$     4)  $mn$

5. Какие корни имеет характеристическое уравнение линейного рекуррентного соотношения  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ ?

1) 1 кратности 2    2) 1 и 4    3) 1 и  $-4$     4)  $-1$  и 4

6. Сколько существует нечетных простых чисел, не превосходящих 20?

1) 5    2) 7    3) 8    4) 10

7. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 30 и взаимно простых с 30?

1) 5    2) 7    3) 8    4) 10

8. Сколько делителей существует у числа 64?

1) 5    2) 6    3) 7    4) 8

9. Сколько существует беспорядков из трех элементов?

1) 1    2) 2    3) 3    4) 4

#### 5.2.4. Примеры задач, выносимых на зачет

**Задача 1.** Сколько существует двузначных четных чисел? Сколько из этих чисел с несовпадающими цифрами?

**Задача 2.** Азбука Морзе состоит из двух символов – точки и тире. Кодовые комбинации включают от 1 до 5 символов. Почему нельзя ограничиться комбинациями с числом символов  $\leq 4$ ?

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:



- 1) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 384 с. (42 экз.)
- 2) Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 3) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

б) дополнительная литература:

- 1) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 2) Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 3) Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1965 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>
- 4) Холл М. Комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963 ([djvu](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm))  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО /ОС ННГУ \_\_\_\_\_.

Автор \_\_\_\_\_ С.В. Сорочан

Рецензент \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой алгебры, геометрии и дискретной математики

\_\_\_\_\_ М.И. Кузнецов

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30.11.2022 года, протокол № 3.