

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы алгебры

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

01.04.01 - Математика

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.06 Дополнительные главы алгебры относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: Знать принципы системного подхода, позволяющие осуществлять анализ проблемных ситуаций. УК-1.2: Уметь вырабатывать стратегию действий основываясь на критическом анализе проблемных ситуаций. УК-1.3: Владеть навыками системного подхода к анализу проблемных ситуаций.	УК-1.1: Знать основные методы и результаты теории алгебраических систем: полей, колец, гомологической алгебры. УК-1.2: Уметь применять теоретические знания к исследованию алгебраических систем. УК-1.3: Владеть навыками исследования алгебраических систем.	Собеседование Задания	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи
ОПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1: Знать основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2: Уметь выбирать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний. ОПК-1.3: Владеть навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1: Знать основы современной алгебры. ОПК-1.2: Уметь выбирать методы решения алгебраических задач ОПК-1.3: Владеть навыками применения алгебраических методов при решении практических задач	Задачи	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Введение в теорию модулей	53	16	16	32	21
Важнейшие классы колец	53	16	16	32	21
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Определение модуля, подмодуля. Гомоморфизмы модулей. Фактормодуль. Теоремы об изоморфизмах модулей. Теорема о соответствии. Модулярный закон. Циклические модули. Свободные модули. Лемма о расщепляющих гомоморфизмах (лемма о ретракте). Короткие точные последовательности. Проективные модули и их описание. Вполне приводимые модули и их описание. Лемма Шрейера-Цассенхгауза. Теорема Жордана-Гельдера. Артиновы модули и их свойства. Гомологическая классификация классически полупростых колец. Группы гомоморфизмов и прямые суммы модулей.

2. Теорема Веддерберна-Артина. Простые артиновы кольца. Классически полупростые групповые алгебры (Теорема Машке). Радикал Джекобсона кольца. Нильдеалы колец. Нильрадикал. Свойства радикалов артиновых колец. Факторкольцо артинова кольца по нильрадикалу классически полупросто.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Ю.Н. Мальцев, Е.В. Журавлев. Лекции по теории ассоциативных колец : учебное пособие – 2-е изд-е. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 434с.

2. Е. В. Журавлев, И. М. Исаев, А. В. Кислицин и др. ; под науч. ред. Ю. Н. Мальцева. Задачи и теоремы теории ассоциативных колец : учебное пособие – Барнаул : АлтГПУ, 2018. – 334 с.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

6.2.3 Типовые задачи для оценки сформированности компетенций

1. Доказать, что для любого кольца R с I имеют место изоморфизмы $R/I \cong (R/I)/I/I$.
2. Доказать, что кольцо $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b \in R, c \in Q \right\}$ артиново слева.
3. Любой инъективный гомоморфизм артинова модуля является изоморфизмом.
4. Доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между идеалами $\text{End}_R M$ R -модуля M и прямыми разложениями модуля M (указание: если $e \in \text{End}_R M$ — идеал кольца $\text{End}_R M$, то $M = e(M) \oplus (1 - e)M$).
5. Доказать, что кольцо $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\}$ артиново справа.
6. Привести пример простого кольца, которое не является телом.
7. Если V_1 и V_2 — неизоморфные простые модули, то $\text{Hom}(V_1, V_2) = 0$.
8. Доказать, что коммутативное кольцо является простым в точности в том случае, когда оно — поле.
9. Доказать, что гомоморфный образ простого модуля либо нулевой, либо изоморфен ему.
10. Собственный подмодуль модуля называется существенным, если его пересечение со всеми ненулевыми подмодулями этого модуля не равно нулю. Доказать, что если A — простой, но не приводимый модуль, то A не содержит собственных существенных подмодулей.
11. Пусть I — правый идеал в кольце R . Модуль $(R/I)_R$ простой в том и только в том случае, когда I — максимальный правый идеал.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач
не зачтено	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Модуль M называется полупростым (или вполне приводимым), если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:
 - а) каждый подмодуль в M является суммой простых подмодулей;
 - б) M — сумма простых подмодулей;
 - в) M — прямая сумма простых подмодулей;
 - г) каждый подмодуль в M является прямым слагаемым.
2. Радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R :
 - а) совпадает с множеством всех таких элементов $r \in R$, что при всех $x \in R$ элемент $1 - rx$ обратим справа;
 - б) является наибольшим среди его идеалов K таких, что $1 - r$ — обратимый элемент при всех $r \in K$;
 - в) совпадает с пересечением всех максимальных левых идеалов, т.е. $J(RR) = J(RR) = J(R)$;
 - г) совпадает с пересечением всех примитивных идеалов;
 - д) совпадает с пересечением правых (левых) аннуляторов всех простых правых (левых) R -модулей;
 - е) содержит все правые и левые ниль-идеалы кольца R .
3. Найдите все подкольца поля Q , содержащие 1.
 4. Для любого левого R -модуля A справедлив изоморфизм левых R -модулей $\text{Hom}_R(R, A) \rightarrow A$. Найдите обратный изоморфизм.
 5. Приведите пример модуля, не имеющего существенных максимальных подмодулей.
 6. Идемпотенты могут быть подняты по модулю любого ниль-идеала кольца R . В частности, идемпотенты могут быть подняты по модулю первичного радикала.
 7. Приведите пример не нетерова модуля, удовлетворяющего условию максимальности для циклических подмодулей.
 8. Циклическая группа простого порядка является квазипроективным простым непроективным модулем над кольцом Z .

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Содержание ответа в целом соответствует теме задания. В ответе отражены все дидактические единицы, предусмотренные заданием. Продемонстрировано знание фактического материала, отсутствуют фактические ошибки
не зачтено	Ответ представляет собой сплошной текст без структурирования, нарушена заданная логика. Части ответа не взаимосвязаны логически. Нарушена логическая структура проблемы (задания): постановка проблемы – аргументация – выводы.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше

		предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Определение модуля, подмодуля. Примеры.
2. Гомоморфизмы модулей. Ядро и образ.
3. Фактормодуль. Первая теорема об изоморфизмах модулей.
4. Вторая теорема об изоморфизмах модулей.
5. Третья теорема об изоморфизмах модулей.
6. Циклические модули.
7. Теорема о соответствии. Модулярный закон.
8. Свободные модули.
9. Лемма о расщепляющих гомоморфизмах (лемма о ретракте).
10. Расщепляющиеся короткие точные последовательности.
11. Проективные модули и их описание.
12. Вполне приводимые модули и их описание.
13. Лемма Шрейера-Цассенхгауза. Теорема Жордана-Гельдера.
14. Артиновы модули и их свойства.
15. Гомологическая классификация классически полупростых колец.
16. Группы гомоморфизмов и прямые суммы модулей.
17. Теорема Веддерберна-Артина.
18. Простые артиновы кольца.
19. Классически полупростые групповые алгебры (Теорема Машке).
20. Нильдеалы колец. Нильрадикал.
21. Факторкольцо артинова кольца по нильрадикалу классически полупросто.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Доказать, что для любого кольца R с 1 имеют место изоморфизмы
2. Доказать, что кольцо $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b \in R, c \in Q \right\}$ артиново
3. Любой инъективный гомоморфизм артинового модуля M — изоморфизм. Доказать.
4. Доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между идеалами кольца $\text{End}_R M$ R -модуля M и прямыми разложениями модуля M . Если e — идемпотент кольца $\text{End}_R M$, то $M = e(M) \oplus (1 - e)M$.
5. Доказать, что кольцо $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\}$ артиново справа.
6. Привести пример простого кольца, которое не является локальным.
7. Если V_1 и V_2 — неизоморфные простые модули, то $\text{Hom}(V_1, V_2) = 0$.
8. Доказать, что коммутативное кольцо является простым тогда и только тогда, когда оно является полем.
9. Доказать, что гомоморфный образ простого модуля либо нулевой, либо изоморфен простому модулю.
10. Собственный подмодуль модуля называется *существенным*, если его пересечение со всеми ненулевыми подмодулями этого модуля не равно нулю. Если M — вполне приводимый модуль, то M не содержит собственных подмодулей.
11. Пусть I — правый идеал в кольце R . Модуль $(R/I)_R$ прост тогда и только тогда, когда I — максимальный правый идеал.

1. Пусть $R = M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in R \right\}$. Тогда $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$ модуль.
2. Доказать, что кольцо эндоморфизмов простого модуля является полем.
3. Доказать, что все R -модули свободны тогда и только тогда, когда R – простое кольцо.
4. Пусть $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in F \right\}$ – правый идеал кольца $R = M_2(F)$. Доказать, что M проективный, но не свободный R -модуль.
5. Найти композиционный ряд для \mathbb{Z} -модуля \mathbb{Z}_{14} .
6. Для подмодулей A и B модуля M докажите существование точной последовательности:

$$0 \rightarrow A \cap B \rightarrow A \oplus B \rightarrow A + B \rightarrow 0$$
7. Для подмодуля N модуля M равносильно:
 - а) N – прямое слагаемое;
 - б) существует эпиморфизм $h: M \rightarrow N$, такой что $h(x) = x$ для любого $x \in N$.
8. Цоколь – вполне инвариантный подмодуль модуля M (т.е. цокль инвариантен относительно любого эндоморфизма).
9. Модуль dM прост в точности тогда, когда $M = \underline{Ra}$ для любого $a \in M$.
10. Аннулятор $Ann(M)$ левого R -модуля M является двусторонним идеалом. Операция $(r + Ann(M))\underline{x} = \underline{rx}$ наделяет M структурой точного $R/Ann(M)$ -модуля.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
отлично	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с

Оценка	Критерии оценивания
	отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме
очень хорошо	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами
хорошо	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами
удовлетворительно	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продemonстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Ламбек Иоахим. Кольца и модули / пер. с англ. А. В. Михалева ; под ред. Л. А. Скорнякова. - М. : Мир, 1971. - 297 с. - (Библиотека сборника " Математика"). - 0.85., 1 экз.
2. Каш Ф. Модули и кольца / пер. с нем. Е. Н. Захаровой, М. И. Урсула ; под ред. В. А. Андрунакиевича. - М. : Мир, 1981. - 368 с. - 2.80., 3 экз.
3. Туганбаев Аскар Аканович. Теория колец : Арифметические модули и кольца. - М. : МЦНМО, 2009. - 472 с. - Библиогр.: с. 453 - 467. - ISBN 978-5-94057-555-9 : 140.00., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Ленг С. Алгебра / пер. с англ. Е. С. Голода ; под ред. А. И. Кострикина. - М. : Мир, 1968. - 564 с. - 2.41., 2 экз.
2. Херстейн И. Некоммутативные кольца / пер. с англ. Е. Н. Кузьмина ; под ред. А. И. Ширшова. - М. : Мир, 1972. - 191 с. - 0.96., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими

средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Любимцев Олег Владимирович, доктор физико-математических наук.

Рецензент(ы): Титова Елена Борисовна.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.