

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

**Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education  
«National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Working programme of the discipline**

Probabilistic models in natural sciences

---

Higher education level

Bachelor degree

---

Area of study / speciality

02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology

---

Focus /specialization of the study programme

General Profile

---

Mode of study

full-time

---

Nizhny Novgorod

Year of commencement of studies 2025

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.02.02 Вероятностные модели в естествознании относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знать основные приемы и методы управления марковскими случайными процессами и область их практического применения. Знать классификацию пространства состояний марковских цепей и основные классы состояний. Знать рекуррентный метод исследования процессов последовательных решений для систем, описываемых управляемым марковским процессом.  УК-1.2: Уметь обосновать выбранный метод решения и доказать его эффективность. Уметь применять итерационный метод выбора стратегии поведения для достижения максимально возможной прибыли управляемого процесса с доходами.  УК-1.3: Владеть приемами анализа марковских процессов с доходами и нахождения полного ожидаемого дохода в случае длительного функционирования системы.	Собеседование Доклад	Зачёт: Задачи

		Владеть методами управления процессами разгрузки и загрузки с помощью функционалов достижения с запретами..		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>0</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>32</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Марковские случайные процессы с дискретным временем и конечным числом состояний / Markov random processes with discrete time and a finite number of states	17		8	8	9
Марковские процессы с доходами / Markov processes with incomes	18		8	8	10
Рекуррентный и итерационный методы для изучения процессов последовательных решений / Recursive and iterative methods for studying the processes of successive solutions	18		8	8	10
Функционалы Чжуна и их применение для управления процессами	18		8	8	10

разгрузки и загрузки / Chung functional groups and their application for managing unloading and loading processes					
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	0	32	33	39

### Contents of sections and topics of the discipline

#### 1) Марковские случайные процессы с дискретным временем и конечным числом состояний

Матрица вероятностей перехода за один шаг, рекуррентное соотношение для вероятностей состояний системы. Пример с игрушечных дел мастером. Классификация состояний марковской цепи, основные классы состояний и их связь. /

Markov random processes with discrete time and a finite number of states

A transition probability matrix for one step, a recurrent relation for the probabilities of the states of the system.

An example of toy-maker. Classification of states of the Markov chain, the main classes of states and their connection.

#### 2) Марковские процессы с доходами

Рекуррентное соотношение для доходов. Анализ марковских процессов с доходами с помощью z-преобразования. Поведение полного ожидаемого дохода в случае длительного функционирования системы.

Markov processes with incomes

Recurrence relations for income.

Analysis of Markov processes with incomes using z-transformation. The behavior of the full expected income incase of a long-term functioning of the system.

#### 3) Рекуррентный и итерационный методы для изучения процессов последовательных решений

Этапы рекуррентного метода и его применение на примерах. Итерационный метод для марковских процессов с одним эргодическим классом, доказательство его эффективности. Итерационный метод для процессов с несколькими эргодическими классами, примеры.

Recursive and iterative methods for studying the processes of successive solutions Stages of the recursive method and its application examples. Iterative method for Markov processes with one ergodic class, proof of its effectiveness. Iterative method for processes with several ergodic classes, examples.

#### 4) Функционалы Чжуна и их применение для управления процессами разгрузки и загрузки

Основные свойства функционалов Чжуна, метод нахождения их условных математических ожиданий.

Применение функционалов Чжуна при решении задачи оптимизации в некоторой управляемой системе массового обслуживания

Chung functional groups and their application for managing unloading and loading processes

The main properties of the Chrng functionals, the method of finding their conditional expectations. The use of the Chung functionals in solving the optimization problem in a certain controlled queuing system

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа заключается в изучении источников из списка литературы. Самостоятельная работа может осуществляться как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## **5. Assessment tools for ongoing monitoring of learning progress and interim certification in the discipline (module)**

### **5.1 Model assignments required for assessment of learning outcomes during the ongoing monitoring of learning progress with the criteria for their assessment:**

#### **5.1.1 Model assignments (assessment tool - Interview) to assess the development of the competency УК-1:**

1. Дайте определение управляемого марковского процесса. Укажите свойства матрицы вероятностей перехода за один шаг.

Give the definition of a controlled Markov process. Show the properties of the one-step transition probability matrix.

2. Запишите рекуррентное соотношение для вероятностей состояний системы.

Write down the recurrence relation for the state probabilities.

3. Приведите пример с игрушечным дел мастером.

Describe the toy-maker example

4. Укажите классификацию состояний марковской цепи и основные классы состояний.

Demonstrate the classification of the states of a Markov chain and main types of states classes

5. Приведите примеры реальных систем, математической моделью которых может служить управляемый марковский процесс.

Give examples of real systems whose mathematical models are controlled Markov processes.

6. Какие состояния марковской цепи называются возвратными и невозвратными?

What states of a Markov chain are called essential recurrent and transient?

7. Какие состояния марковской цепи называются существенными и несущественными?

What states of a Markov chain are called essential and non-essential?

8. Что такое эргодический класс?

What's an ergodic class?

9. Дайте определение марковского процесса с доходами.

Give the definition of a Markov process with incomes.

10. Опишите этапы рекуррентного метода и проиллюстрируйте их на примере.

Talk on the steps in the recurrent method and give an example

11. Какие основные блоки содержит итерационный метод для марковских процессов с одним эргодическим классом?

What are the main blocks in the iterative method for a Markov process with a single ergodic class?

12. Докажите эффективность итерационного метода с точки зрения скорости сходимости и обязательного достижения оптимального результата.

Prove the efficiency of the iterative method from the point of view of the convergence speed and guaranteed convergence to the optimal result.

13. Укажите особенности итерационного метода для марковских процессов с несколькими эргодическими классами.

Talk on features of the iterative method for Markov processes with several ergodic classes.

14. Опишите основные свойства функционалов достижения с запретами.

Describe the main properties of functionals of visit with prohibition

15. Приведите примеры задач оптимизации, которые можно решить с использованием функционалов Чжуна.

Give examples of optimization problems that can be solved by means of Chung functionals.

### Assessment criteria (assessment tool — Interview)

Grade	Assessment criteria
pass	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
fail	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо»

### 5.1.2 Model assignments (assessment tool - Report) to assess the development of the competency УК-1:

1. Конструктивное задание полумарковского процесса. Примеры. Основные характеристики полумарковского процесса.

Constructive definition of a semi-Markov process. Examples. Basic characteristics of a semi-Markov process.

2. Вложенная цепь Маркова. Предельные свойства полумарковских процессов.

Embedded Markov chain. Limit properties of semi-Markov processes.

3. Свойства аддитивных функционалов от полумарковских процессов.

Properties of additive functionals of semi-Markov processes.

4. Управление полумарковским процессом и задачи оптимального управления.

Control of semi-Markov process and optimal control problems

5. Марковские моменты. Мартингалы и полумартингалы.

Markov moments. Martingales and semimartingales

6. Марковские процессы. Постановка задачи об оптимальной остановке. Оптимальные

правила остановки в классе ограниченных марковских моментов.

Markov processes. Optimal stopping problem. Optimal stopping rules in the class of bounded Markov moments

7. Задача о выборе наилучшего объекта.

The best item selection problem

8. Эксцессивные функции и наименьшие эксцессивные мажоранты. Эксцессивная характеристика цены.

Excessive functions and least excessive magiorants. Excessive cost characterization.

### Assessment criteria (assessment tool — Report)

Grade	Assessment criteria
pass	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
fail	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо»

### 5.2. Description of scales for assessing learning outcomes in the discipline during interim certification

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компет	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно

ений (индик атора достиж ения компет ений)	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Scale of assessment for interim certification

Grade		Assessment criteria
pass	<b>outstanding</b>	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "outstanding", the knowledge and skills for the relevant competencies have been demonstrated at a level higher than the one set out in the programme.
	<b>excellent</b>	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "excellent",
	<b>very good</b>	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "very good",



	<b>good</b>	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "good",
	<b>satisfactory</b>	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "satisfactory", with at least one competency developed at the "satisfactory" level.
<b>fail</b>	<b>unsatisfactory</b>	At least one competency has been developed at the "unsatisfactory" level.
	<b>poor</b>	At least one competency has been developed at the "poor" level.

### 5.3 Model control assignments or other materials required to assess learning outcomes during the interim certification with the criteria for their assessment:

#### 5.3.1 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency УК-1

1. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид:

A transition probability matrix looks as follows:

1. 0.5 0.4  
0.6 0.2 0.2  
0.3 0.4 0.3

Распределение по состояниям в начальный момент определяется вектором ( 0.7, 0.2, 0.1). Найти а) распределение по состояниям в момент  $t=2$ , б) вероятность того, что в моменты  $t = 0, 1, 2, 3$  состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2 в) стационарное распределение вероятностей. Определить тип состояний данной цепи.

The initial distribution is ( 0.7, 0.2, 0.1). Find a) the probability distribution at instant  $t=2$ ; b) the probability that at successive instants  $t = 0, 1, 2, 3$  the system states are exactly 1, 3, 3, 2; c) the stationary probabilities. Determine the types of the states of the chain.

2. В  $N$  ячейках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть  $n$  – число ячеек, оставшихся пустыми после размещения  $n$  частиц.

Показать, что последовательность  $n = 0, 1, 2, \dots$  является цепью Маркова, и найти вероятности перехода этой цепи. Определить, есть ли у данной марковской последовательности несущественные состояния.

Сколько эргодических классов она имеет?

Particles are randomly distributed among  $N$  cells one by one and independently of each other.

Denote by  $n$  the number of empty cells. Prove that the sequence  $n = 0, 1, 2, \dots$  is a Markov chain and find its transition probabilities. Find out whether the chain has inessential states.

How many ergodic classes are there?

#### Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
pass	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина,

Grade	Assessment criteria
	сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
fail	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо»

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Giuseppe Ciaburro. Hands-On Simulation Modeling with Python : Develop Simulation Models to Get Accurate Results and Enhance Decision-making Processes. - Packt Publishing, 2020. - 1 online resource. - ISBN 9781838988654. - ISBN 9781838985097. - Текст : электронный.,  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=854280&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Дынкин Евгений Борисович. Управляемые марковские процессы и их приложения / АН СССР, Центр. экон.-мат. ин-т. - М. : Наука, 1975. - 338 с. : черт. - 0.95., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Интернет-ресурсы электронного портала ИИТММ <http://www.itmm.unn.ru/studentam/uchebno-metodicheskie-materialy/>

Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Лобачевского  
<http://www.unn.ru/books/resources.html>

Общероссийский математический интернет-портал <http://mathnet.ru>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology.

Author(s): Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.

