

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины
Вещественные алгебраические многообразия

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Математика (общий профиль)

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.06.02 Вещественные алгебраические многообразия относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
<i>ПК-5: Обладает навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования</i>	<i>ПК-5.1: Знает уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного процесса ПК-5.2: Умеет учитывать уровень подготовки и психологию обучающихся ПК-5.3: Владеет навыками преподавания математики и информатики в средней школе, средних специальных учебных заведениях</i>	<i>ПК-5.1: Знает необходимую литературу по вещественным алгебраическим многообразиям. ПК-5.2: Умеет корректно формулировать задачи теории вещественных алгебраических многообразий. ПК-5.3: Владеет опытом применения методов и принципов самостоятельной научно-исследовательской работы в области вещественных алгебраических многообразий.</i>	<i>Задачи</i>	<i>Зачёт: Задания Контрольные вопросы</i>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	24
- КСР	1

самостоятельная работа	95
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них		Всего	
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы		
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
Тема 1	23	4	4	8	15
Тема 2	37	6	6	12	25
Тема 3	23	4	4	8	15
Тема 4	37	6	6	12	25
Тема 5	23	4	4	8	15
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	144	24	24	49	95

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Плоские вещественные алгебраические кривые.

Тема 2. Метод малого параметра. Кривые Харнака.

Тема 3. Комплексификация кривой.

Тема 4. Ограничения на комплексные схемы вещественных алгебраических кривых.

Тема 5. Гибкие кривые.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Вещественные алгебраические многообразия (Математика) 4 курс.,

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=10933>.

Иные учебно-методические материалы:

1. Теоретический материал лекционных занятий и литературные источники (список обязательной и дополнительной литературы приводится).

Для подготовки к зачёту рекомендуется использовать собственные конспекты лекций, а также источники, рекомендованные в списке литературы.

2. Домашние задания к научно-практическим занятиям.

Проверка выполнения домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия.

Основная форма контроля: проверка выполнения отдельных заданий в форме коллективного обсуждения у доски.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

0.1. (а) Покажите, что x при фиксированных значениях (y, z) является кратным корнем уравнения $x^3 + xy + z = 0$ тогда и только тогда, когда $x = -3z/2y$ и $4y^3 + 27z^2 = 0$;

(б) это уравнение имеет 3 простых корня по x тогда и только тогда, когда $4y^3 + 27z^2 < 0$;

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задача решена полностью.
не зачтено	Задача не решалась или решена не полностью.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
		не зачтено		зачтено			
Знания	Отсутствие	Уровень	Минимальн	Уровень	Уровень	Уровень	Уровень

	знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	о допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отделенным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1.1. Параметризуйте конику $C: (x^2 + y^2 = 5)$ с помощью пучка прямых, проходящих через точку $(2, 1)$, и как следствие найдите все рациональные решения уравнения $x^2 + y^2 = 5$.

1.2. Пусть p — некоторое простое число. Поэкспериментируйте с разными p и угадайте необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение $x^2 + y^2 = p$ имело рациональные решения.

2.1. Пусть $C: (y^2 = x^3 + x^2) \subset \mathbb{R}^2$. Покажите, что любая прямая, проходящая через точку $(0, 0)$, пересекает C еще в одной точке, и получите в качестве следствия рассмотренную в разд. (2.1) параметризацию кривой C . Прделайте то же самое для $(y^2 = x^3)$ и $(x^3 = y^3 - y^4)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задание выполнено полностью.
не зачтено	Задание не выполнялось или выполнено не полностью.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Связь между однородными и аффинными координатами на вещественной проективной плоскости.
2. Пересечение двух прямых на проективной плоскости.
3. Топологическое описание неособой вещественной алгебраической кривой. Определение изотопии. Проблемы топологической и изотопической классификаций таких кривых.
4. Топологические кривые: свойства овалов и псевдопрямых.
5. Теорема Безу о пересечении кривых. Доказательство для случая пересечения с прямой.
6. Необходимое и достаточное условие одностороннего расположения на вещественной проективной плоскости неособой вещественной алгебраической кривой.
7. Теорема Гильберта о гнёздах.
8. Неравенство для числа овалов в объединении пяти гнёзд.
9. Ограничения на изотопические типы неособых квартик.
10. Определение особой точки "крест". Теорема о классическом малом возмущении.

11. Построение M-кривых Харнака.
12. Прямая в пространстве кривых и завершение доказательства теоремы о кривых Харнака.
13. Малое возмущение с комплексной точки зрения.
14. Доказательство ориентируемости комплексной кривой.
15. Вычисление рода неособой комплексной кривой.
16. Теорема о построении кривой типа I малым возмущением.
17. Теорема о типе M-кривой.
18. Сравнение Кляйна.
19. Теорема о типе кривой с гнездом максимальной глубины.
20. Доказательство формулы Рохлина.
21. Доказательство формулы Рохлина-Мишачёва.
22. Индекс точки относительно кривой и доказательство сравнения Арнольда.
23. Доказательство неравенства Харнака для гибкой кривой.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Получено не менее 7 баллов из 10.
не зачтено	Получено менее 7 баллов из 10.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 1 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1981. - 28 с. - б/ц., 16 экз.
2. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 2 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 32 с. - б/ц., 20 экз.
3. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 3 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 32 с. - б/ц., 19 экз.
4. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 4 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 28 с. - б/ц., 20 экз.
5. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 5 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1983. - 36 с. - б/ц., 19 экз.
6. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 6 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1983. - 36 с. - б/ц., 20 экз.

Дополнительная литература:

1. Элементарная топология / Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. - 3-е изд., доп. - Москва : МЦНМО, 2019. - 358 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-3263-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828703&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=10933>

Oleg Viro's home page, texts for students. Introductions to topology of real algebraic varieties.

<https://pdmi.ras.ru/~olegviro/es/index.html>

V. Kharlamov and O. Viro. Easy reading on topology of real plane algebraic curves.

<https://pdmi.ras.ru/~olegviro/introTRAV.html>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Звонилов Виктор Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.