

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Практикум по математическому анализу

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

15.03.03 - Прикладная механика

---

Направленность образовательной программы

Инженерное приложение суперкомпьютерного моделирования

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.34 Практикум по математическому анализу относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1: Демонстрирует знание основ проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.2: Демонстрирует умение применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет методикой проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знать: основы проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.  ОПК-1.2: Уметь: применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности  ОПК-1.3: Владеет методикой проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Задачи	Зачёт: Задачи

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>0</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>128</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>14</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
1. Введение	1	0	0	0	1
2. Вещественные числа	5	0	4	4	1
3. Числовые последовательности	22	0	20	20	2
4. Предел функции	11	0	10	10	1
5. Непрерывные функции	11	0	10	10	1
6. Производная функции	11	0	10	10	1
7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения	11	0	10	10	1
8. Неопределенный интеграл:	8	0	8	8	0
9. Определенный интеграл	9	0	8	8	1
10. Приложения определенного интеграла	9	0	8	8	1
11. Функции многих переменных и пределы	9	0	8	8	1
12. Непрерывные функции многих переменных	9	0	8	8	1
13. Дифференцирование функции многих переменных	9	0	8	8	1
14. неявно-заданные функции	9	0	8	8	1
15. Экстремумы функций многих переменных	8	0	8	8	0
Аттестация	0				
КСР	2				2
Итого	144	0	128	130	14

## Содержание разделов и тем дисциплины

### 1. Введение

1. Предмет математического анализа.

Очерк истории развития математического анализа. Математическая символика, обозначения

### 2. Вещественные числа

Числовая прямая.

Числовые множества: промежутки, интервалы, лучи.

Окрестность точки.

Ограниченные и неограниченные множества, грани множества.

Существование точных граней ограниченных числовых множеств.

### 3. Числовые последовательности:

Определение числовой последовательности. Сходимость и предел числовой последовательности.

Примеры.

Свойства пределов и числовых последовательностей.

Теорема о единственности предела, теорема об ограниченности сходящейся

последовательности, предельный переход в неравенствах, арифметические действия со сходящимися последовательностями.

Бесконечно малые и большие последовательности, связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей.

Предел монотонной последовательности.

Число  $e$ . Принцип вложенных отрезков.

Подпоследовательности.

Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Предельные точки числового множества. Верхний и нижний пределы последовательности.

Критерий Коши существования предела.

Полнота числовой прямой.

### 4. Предел функции.

Функции действительного переменного. Область определения, множество значений. Способы задания функций. График функции.

Определение предела функции в точке по Гейне и Коши.

Теорема эквивалентности определений. Локальная ограниченность функции, имеющей предел.

Свойства пределов функций.

Предел суперпозиции.

Бесконечно малые функции и их сравнение.

Замечательные пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ . Раскрытие неопределенностей.

Обобщение понятия предела: односторонние пределы, бесконечно большие функции, пределы на бесконечности.

Критерий Коши существования конечного предела функции в точке и на бесконечности.

### 5. Непрерывные функции:

Свойства непрерывных функций.

Локальная устойчивость знака.

Различия определения непрерывности функции в точке.

Арифметические действия над непрерывными функциями.

Непрерывность суперпозиции.

Классификация точек разрыва функции.

Непрерывность функции на множестве. Непрерывность элементарных функций. Теорема о промежуточных значениях.

Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении точных граней.

Условия непрерывности монотонной функции на отрезке.

Теорема о непрерывности обратной функции.

6. Производная функции:

Задачи, приводящие к понятию производной функции.

Средняя и мгновенная скорость изменения процесса.

Производная и дифференциал функции в точке. Дифференцируемость функции.

Геометрический смысл производной и дифференциала.

Касательная к графику функции в точке.

Свойства производных и дифференциалов функций. Производная суперпозиции и обратной функции.

Таблица производных. Дифференцируемость элементарных функций.

Функции и кривые на плоскости, заданные параметрически.

Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Уравнения касательной и нормали к плоской кривой, заданной параметрически.

Инвариантность формы первого дифференциала.

Приложения дифференциала к приближенным вычислениям значений функции.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Неинвариантность формы дифференциалов высшего порядка.

7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения:

Локальный экстремум функции. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем. Формулы конечных приращений.

Формула Тейлора. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Условие монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума.

Направления выпуклости, вогнутости функции. Точки перегиба. Достаточное условие перегиба. Асимптоты функции. Общая схема исследования и построения графиков функции.

Нахождение глобального экстремума функции.

Приближенные методы нахождения корней уравнений. Метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательной, оценка погрешности.

8. Неопределенный интеграл:

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства интеграла.

Таблица интегралов.

Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Рациональные и дробно-рациональные функции. Разложение правильной дробно-рациональной функции в сумму простейших дробей. Интегрирование простейших дробей.

Метод неопределенных коэффициентов.

Рационализация подинтегральной функции. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций.

Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Теорема Чебышева.

9. Определенный интеграл:

Задачи о площади подграфика функции, о работе переменной силы, о массе неоднородного стержня.

Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл.

Интегрируемость и ограниченность функции.

Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости. Колебание функции на отрезке.

Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора.

Классы интегрируемых функций.

Свойства определенного интеграла и интегрируемых функций. Теорема о среднем.

Интеграл как функция верхнего предела. Свойства интеграла с переменным верхним пределом.  
Формула Ньютона-Лейбница.

Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интервале.

10. Приложения определенного интеграла:

Понятие кривой на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой.

Эквивалентность параметризаций.

Гладкие и кусочно-гладкие кривые.

Определение длины дуги и спрямляемой кривой. Вычисление длины дуги кривой в различных координатах.

Дифференциал дуги кривой.

Определение площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости области. Квадрируемость области со спрямляемой границей. Вычисление площади плоских фигур.

Объем тела. Критерий кубируемости тела. Вычисление объема тела с известными сечениями, и тела вращения.

Площадь поверхности вращения.

Приложения к задачам механики: масса, статические моменты, координаты центра масс, моменты инерции (материальной кривой и пластины). Теорема Гульдина.

11. Функции многих переменных и пределы: Арифметическое Евклидово пространство  $R^n$ . Связное множество в  $R^n$ . Шаровая и кубическая окрестности точки. Открытые и замкнутые множества в  $R^n$ . 11

Последовательность в  $R^n$ . Сходимость и предел последовательности. Покоординатная сходимость.

Критерий Коши сходимости последовательности в  $R^n$ .

Ограниченные и неограниченные множества в  $R^n$  Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Компакты. Критерий компактности.

Функции многих переменных.

График функции двух переменных.

Линии и поверхности уровня.

Кратные и повторные пределы функции. Свойства пределов. Критерий Коши.

12. Непрерывные функции многих переменных

Различные определения непрерывности функции в точке. Непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным. Свойства непрерывных функций.

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве.

Свойства функции, непрерывной на компакте: теорема Вейерштрасса об ограниченности и существовании глобальных экстремумов, теорема Кантора о равномерной непрерывности.

13. Дифференцирование функции многих переменных: Частные производные. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции. Достаточное условие дифференцируемости.

Линеаризация функций Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала.

Абсолютная и относительная погрешность.

Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

Практические следствия инвариантности.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Геометрический смысл  
дифференциала.

Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных.

Дифференциал высших порядков. Неинвариантность формы высших дифференциалов. Инвариантность при аффинной замене переменных.

Формула Тейлора. Оценка остаточного члена и приближенное вычисление функции с помощью формулы Тейлора. Формула Лагранжа конечных приращений.

14. Неявно-заданные функции:

Неявно-заданные функции и система неявных функций, одной и многих

переменных. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости. Якобиан системы

функции.

Вычисление старших производных неявных функций.

Уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно.

15. Экстремумы функций многих переменных

Необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума.

Условный экстремум функции.

Метод множителей Лагранжа.

Глобальные экстремумы функций (безусловные и условные).

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа обучающихся осуществляется в виде работы с рекомендованной обязательной и дополнительной литературой, подготовке к лекциям, подготовке к промежуточной аттестации.

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:**

**Задача 1.**

1. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} + x^3 - 1}{\ln(\cos x)}$

2. Найти  $f'_+(0); f'_-(0)$

$$f(x) = \arcsin(e^{-x^2})$$

**Задача 2.**

1. Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$  не существует.

2. Разложить по формуле Тейлора функцию  $f(x) = xe^{2x}$  в окрестности точки  $x_0 = 1$  до  $o((x-1)^n)$ .

**Задача 3.**

1. Доказать, что последовательность сходится

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

2. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ .

**Задача 4.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2}$ .

2. Найти  $f'_+(0); f'_-(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} - 1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**Задача 5.**

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$ .

2. Найти  $f'_+(0); f'_-(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x \arcsin\left(\cos \frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$



**Задача 6.**

1. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)}$

2. Найти точки разрыва функции и установить их род  $f(x) = \frac{1}{1+2^{\lg x}}$ .

**Задача 7.**

1. Найти  $y'_x, y''_{xx}$   $\left\{ \begin{array}{l} x = a + (\sin t - t) \\ y = a (\cos t - 1) \end{array} \right.$ , где  $a$  - постоянная

2. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}; & x > 0 \\ e^{x^2} - 1; & x \leq 0 \end{cases}$$

**Задача 8.**

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+1}} \right)$ .

2. Найти  $f'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + x; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$$

**Задача 9.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ .

2. Найти асимптоты графика функции

$$y = \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}$$

**Задача 10.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ .

2. Найти  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin \frac{5}{x}\right); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

**Задача 11.**

1. Доказать, что последовательность расходится

$$x_n = \frac{2^{n+1} - (-3)^n}{(-2)^n + 3^{n+1}}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x \ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

**Задача 12.**

1. Доказать, что последовательность расходится

$$x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +0} (2\sqrt{x} + x)^{\frac{1}{\ln x}}$

**Задача 13.**

1. Доказать, что последовательность сходится

$$x_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos(2n-1)}{n(n+1)}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \ln(\ln x)}{\sqrt[3]{2x+3} \cdot \sqrt{\ln x}}$

**Задача 14.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\sin^2 x)}$

2. Найти  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**Задача 15.**

1. Найти асимптоты графика функции

$$y = x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

2. Разложить функцию  $f(x) = \frac{x}{x+4}$  по формуле Тейлора в точке

$$x_0 = -1 \text{ до } o((x+1)^n).$$

**Задача 16.**

1. Доказать расходимость по критерию Коши

$$x_n = \operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Исследовать на дифференцируемость.

Найти  $f'_+(0)$ ;  $f'_-(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3, & x \geq 0 \\ \sin x \cdot \cos x, & x < 0 \end{cases}$$

**Задача 17.**

1. Доказать, что  $x_n = n^2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$  неограниченна, но не бесконечно большая.

2. Найти  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + x; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$$

**Задача 18.**

1. Доказать, используя критерий Коши, что последовательность расходится

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \frac{1}{\sqrt[3]{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{7n-1}}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$

**Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой

	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

**Задача 1.**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\operatorname{tg} x}$$

2. Найти точки разрыва функции и установить их род

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0, x < 1 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**Задача 2.**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

2. Найти точки разрыва функции и установить их род  $f(x) = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$

**Задача 3.**

$$1. \text{Найти предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x}$$

**Задача 4.**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - \sqrt[7]{x^2 + 10x + 1}}{x}$$

2. Найти  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**Задача 5.**

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$$

2. Найти асимптоты графика функции

$$y = x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x$$

**Задача 6.**

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \ln(\operatorname{ch} x^2))$

2. Найти  $y''_{x^2}$

$x(t) = t^3 + 3t$

$y(t) = t \cdot \operatorname{arctg} t - \ln \sqrt{1+t^2}$

**Задача 7.**

1. Найти  $y'_x$ , если:  $y(t) = (\ln t)^{\sin t^2}$ ,  $x(t) = \cos \operatorname{arctg} t$

2. Найти  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin \frac{5}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**Задача 8.**

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}} \right)$

2. Найти  $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \cdot \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 1/3 & ; x = 0 \end{cases}$$

**Задача 9.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin 4x + \cos 4x} \right)^{\frac{1}{x}}$

2. Найти асимптоты графика функции  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

**Задача 10.**

Исследовать функции на непрерывность и построить графики.

$$a) y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ x+1 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad б) y = 8^{\frac{1}{5-x}}$$

**Задача 11.**

Исследовать функции и построить их графики:

$$a) y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}; \quad б) y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

**Задача 12.**

Найти интегралы:

$$1. \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx. \quad 2. \int x \cdot 7^{x^2} dx.$$

**Задача 13.**

Найти интегралы:

$$1. \int \ln(4x^2 + 1) dx. \quad 2. \int (x^2 + 7x + 12) \cos 6x dx.$$

**Задача 14.**

Найти интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}. \quad 2. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

**Задача 15.**

Найти интегралы:

$$1. \int \frac{-6x^2 + 11x - 10}{(x-2)(x+2)^2} dx. \quad 2. \int \frac{6x^2 + 9x + 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

**Задача 16.**

Дана функция  $z = f(x, y)$ . Проверить, удовлетворяет или нет эта функция данному уравнению.

$$z = \sin^2(y - ax); \quad a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

**Задача 17.**

Найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x; \quad D: \quad x = 0; \quad y = 0; \quad 2x + 3y - 14 = 0.$$

**Задача 18.**

Даны: функция  $z = z(x, y)$ , точка  $A$  и вектор  $\vec{a}$ . Найти 1)  $\text{grad } z$  в  $(\cdot)A$ ; 2) производную в  $(\cdot)A$  по направлению вектора  $\vec{a}$ .

$$z = \ln(3x^2 + 5y^2); \quad A(2; 3); \quad \vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}.$$



**Задача 19.**

Найти все точки экстремума функции  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 + x + y$$

**Задача 20.**

Найти длину дуги кривой:

$$l : \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}]$$

**Задача 21.** Найти площадь области, ограниченной кривыми:

$$y = 2, \quad y = x^2 - x$$

**Задача 22.** Найти  $d^2y$ ,  $x$  – независимая переменная.

$$y = \sin(e^x)$$

**Задача 23.** Доказать по определению, что число является пределом последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{n^3 + 1} = 1$$

**Задача 24.** Найти  $d^2u$ ,  $x, y$  – независимые переменные.

$$d^2u = x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 2y + 1$$

**Задача 25.** Найти уравнение касательной плоскости к графику функции в точке  $(0, 0)$

$$u = 1 - x^2 - y^2$$

**Задача 26.** Найти максимум и минимум функции на отрезке.

$$f(x) = x + \sin(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

**Задача 27.** Доказать, что число является пределом функции по определению.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = 1$$

**Задача 27.** Найти  $d^2 f$ ,  $f = f(u, v)$ ,  $u = x + y$ ,  $v = x^2 + y^2$

**Задача 28.** Разложить функцию  $f(x) = x^2 + e^x + \sin(x)$  в точке  $x = 0$  до  $o(x^6)$

**Задача 29.** Разложить функцию  $f(x, y) = x^2 + 4xy^2 + 2y^2 - 3x - 5y$  по формуле Тейлора в точке  $(0, 1)$  до  $o(\rho^2)$ .

**Задача 30.** Найти работу, которую совершает сила  $F = 3x^2 + 2x$  при движении тела из точки  $x = 0$  в точку  $x = 2$

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

#### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Ильин Владимир Александрович. Основы математического анализа : учеб. для студентов физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" : [в 2 ч.]. - Изд. 7-е, стер. - М. :

- Физматлит, 2009-. - (Курс высшей математики и математической физики / под. ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 1). Основы математического анализа . Ч. 1. - М., 2009. - Изд. 7-е, стер. - 648 с., 117 ил. - ISBN 978-5-9221-0902-4 : 300.08., 46 экз.
2. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Краткий курс математического анализа : учебник для студентов вузов : [в 2 т.]. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. - 3-е изд., перераб. - М. : Физматлит, 2003. - 400 с. - ISBN 5-9221-0184-6 (т. 1). - ISBN 5-9221-0183-8 : 126.35., 22 экз.
3. Демидович Борис Павлович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : [для ун-тов и пед. ин-тов]. - 6-е изд., стер. - М. : Наука, 1966. - 544 с. : с черт. - 0.90., 8 экз.

Дополнительная литература:

1. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Краткий курс математического анализа : [в 2 т.] : учеб. для студентов вузов. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 3-е изд., перераб. - М. : Физматлит, 2003. - 424 с. - ISBN 5-9221-0185-4 (т. 2). - ISBN 5-9221-0183-8 : 126.35., 22 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

<http://new.e-vmk.unn.ru/sites/>

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 15.03.03 - Прикладная механика.

Автор(ы): Филиппов Викторий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.