

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Алгебра

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.03 - Механика и математическое моделирование

---

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.13 Алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Владеет навыками работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знает принципы обобщения информации об алгебраических объектах  УК-1.2: Умеет систематизировать информацию об объектах алгебры  УК-1.3: Владеет навыками работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	Тест	Экзамен: Контрольные вопросы
ОПК-1: Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук ОПК-1.2: Умеет анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук и основные понятия алгебры, постановки стандартных задач и методы их решения, основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата	Контрольная работа	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

	<i>математического циклов при решении стандартных профессиональных задач</i>	<p><b>ОПК-1.2:</b>  <i>Умеет анализировать и решать стандартные алгебраические задачи применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук</i></p> <p><b>ОПК-1.3:</b>  <i>Владеет навыками применения основных вычислительных алгоритмов алгебры для решения прикладных задач с использованием современных компьютерных технологий</i></p>		
--	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>8</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>288</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>96</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>64</b>
- КСР	<b>4</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>52</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>72</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия	Занятия	Всего	

		лекционного типа	семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы		
Поле комплексных чисел и алгебраические системы	19	8	6	14	5
Теория определителей	21	10	6	16	5
Алгебра матриц	21	10	6	16	5
Системы линейных алгебраических уравнений	21	10	6	16	5
Кольцо многочленов	24	10	8	18	6
Векторное (линейное) пространство	27	12	10	22	5
Линейные отображения	29	12	10	22	7
Билинейные и квадратичные формы	25	12	6	18	7
Евклидово (унитарное) пространство	25	12	6	18	7
Аттестация	72				
КСР	4			4	
Итого	288	96	64	164	52

### Содержание разделов и тем дисциплины

#### 1 семестр

1. Поле комплексных чисел и алгебраические системы. Основные определения, утверждения и примеры групп, колец, полей. Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, операции. Степень и извлечение корня из комплексного числа.
2. Теория определителей. Перестановки и подстановки. Группа подстановок. Определители  $n$ -го порядка и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Правило Крамера.
3. Алгебра матриц. Сложение матриц, умножение матриц на число, умножение матриц, обратная матрица.
4. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод последовательного исключения неизвестных для систем линейных алгебраических уравнений.  $N$ -мерное арифметическое пространство. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Однородные системы. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной системы и присоединенной однородной системы.
5. Кольцо многочленов. Определение кольца многочленов. Делимость в кольце многочленов. Корни многочленов.
6. Локализация корней многочлена.
7. Поле частных коммутативной области целостности
8. Кольцо многочленов от  $n$  переменных над полем.
9. Симметрические многочлены.

#### 2 семестр

6. Векторное (линейное) пространство. Линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Координаты, матрица перехода от одного базиса к другому.
7. Линейные отображения (операторы), действия с ними, их матрицы. Ядро, образ, ранг,

дефект линейного отображения. Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен оператора (матрицы).

8. Билинейные и квадратичные формы. Изменение матрицы квадратичной функции при изменении базиса. Метод Лагранжа приведения симметричной билинейной формы к каноническому виду. Закон инерции.

9. Евклидово (унитарное) пространство. Скалярное произведение, свойства.

Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.

10. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства.

11. Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств.

12. Соответствие между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве.

13. Сопряженный оператор. Свойства. Матрица сопряженного оператора. Инвариантные подпространства

относительно сопряженного. Самосопряженные (эрмитовы) операторы и их свойства. Спектр самосопряженного оператора.

14. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пары форм.

15. Ортогональные (унитарные) операторы, их свойства, эквивалентные определения. Матрица ортогонального оператора, свойства собственных чисел и собственных векторов ортогонального оператора. Канонический вид ортогонального (унитарного) оператора.

16. Тензоры. Сопряженное векторное пространство, двойственный базис. Определение тензора, координаты тензора.

Операции над тензорами.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

электронный курс "«Алгебра 1 курс (математика, ФММ, МиММ)»",  
<http://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4485>.

Иные учебно-методические материалы:

1. Золотых Н.Ю., Любимцев О.В. Необходимые требования к успешному освоению дисциплины «Алгебра» (минимально необходимый уровень) // — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. — 86 с.

Постоянная ссылка на документ: [http://old.lib.unn.ru/students/src/Algebra-Lyubimtsev\\_Zolotyh.pdf](http://old.lib.unn.ru/students/src/Algebra-Lyubimtsev_Zolotyh.pdf)

2. Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 1: Учебно-методическое пособие. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. — 35 с.

Постоянная ссылка на документ: [http://old.lib.unn.ru/students/src/KLM\\_The%20beginning%20of%20algebra.%20Part%201.pdf](http://old.lib.unn.ru/students/src/KLM_The%20beginning%20of%20algebra.%20Part%201.pdf)

3. Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 2: Учебно-методическое пособие. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2024. — 41 с.

Постоянная ссылка на документ: <http://old.lib.unn.ru/students/010301.html>

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции УК-1:

---

№1. Найдите матрицу  $X$ , если известно, что:

$$X * \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 33 & 77 \end{pmatrix}$$

Ответы:

$$+: X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$-: X = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-: X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-: X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

№2. Найдите матрицу  $X$ , если известно, что:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$$

Ответы:

$$-: X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$+: X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$-: X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-: X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

№3. Найдите транспонированную матрицу по отношению к матрице

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$-: \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-: \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$+: \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-: \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

№4. Матрицу  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  возвели в степень  $n$ , и получилась матрица  $\begin{pmatrix} 35 & 126 \\ 42 & 161 \end{pmatrix}$ .  
Чему равно  $n$ ?

-: 4

-: 2

+: 3

-: 5

№5. Сопоставьте матрицу и её вид:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А) Диагональная

В) Ступенчатая

Б) Единичная

Г) Треугольная

+: 1 – В; 2 – А; 3 – Г; 4 – Б

№6. Ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 14 \\ 5 & 10 & 30 \end{pmatrix}$  равен:

+: 2

-: 1

-: 4

-: 3

№7. Произведение матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  на транспонированную по отношению к ней матрицу равно:

$$+: \begin{pmatrix} 101 & 43 \\ 43 & 29 \end{pmatrix}$$

$$-: \begin{pmatrix} 130 & 43 \\ 43 & 72 \end{pmatrix}$$

$$-: \begin{pmatrix} 43 & 101 \\ 43 & 29 \end{pmatrix}$$

$$-: \begin{pmatrix} 43 & 29 \\ 101 & 43 \end{pmatrix}$$

№8. Найдите  $x$ , если известно, что определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ x-3 & 2 & 4 \\ 7 & x-5 & 6 \end{pmatrix}$  равен 14:

-: 3                      +: 4                      -: 7                      -: 1

№9. Найдите  $x$  и  $y$ , если известно, что определитель матрицы  $\begin{pmatrix} -1 & y+4 & 2 \\ 0 & x+1 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  равен 25, и определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & y+5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & x \end{pmatrix}$  равен -12:

-:  $x = 3, y = 3$                       -:  $x = 2, y = -1$                       -:  $x = -1, y = 3$                       +:  $x = 3, y = -1$

№10. Найдите  $x, y$  и  $z$ , если известно, что определитель матрицы  $\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 4 \\ y-2 & 3 & 1 \\ z+6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  равен -25, определитель матрицы  $\begin{pmatrix} -2 & x+1 & 5 \\ 1 & y & -3 \\ 4 & z+6 & 2 \end{pmatrix}$  равен -71, и определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ -5 & -1 & y-2 \\ 4 & 5 & z+2 \end{pmatrix}$  равен -45:

+:  $x = 2, y = 1, z = -1$                       -:  $x = -1, y = 2, z = 1$   
 -:  $x = 1, y = -1, z = 2$                       -:  $x = 2, y = -1, z = 1$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Сформированные систематические знания методов критического анализа и оценки современных научных достижений, а также методов генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных
не	Фрагментарные знания методов критического анализа и оценки современных научных

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	достижений, а также методов генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач или отсутствие знаний

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Найти общее решение и одно частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного

матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Задача 2. Является ли диагонализируемым линейный оператор над  $\mathbb{R}$ , заданный в стандартном

базисе матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задача 3. Найти жорданову форму матрицы  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задача 4. Найти нормальный вид в области вещественных чисел и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 5. Найти канонический вид и ортогональное преобразование, приводящее  $f$  к каноническому виду (приведение к главным осям),

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 6. Процессом ортогонализации Грама-Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов  $u_1 = (1, 2, -1)$ ,  $u_2 = (0, 3, -2)$ ,  $u_3 = (2, 1, 0)$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Решена полностью с применением оригинальных методов решения
отлично	Решена полностью без недочетов
очень хорошо	Решена полностью с незначительными недочетами
хорошо	Решена с одной ошибкой
удовлетворительно	Решена с двумя ошибками и мелкими недочетами
неудовлетворительно	Решено половина контрольной работы

Оценка	Критерии оценивания
плохо	Не решено ни одной задачи

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки и. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
<b>зачтено</b>	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1**

**1 семестр**

1. Системы линейных уравнений. Эквивалентные системы, свойства. Теорема об элементарных преобразованиях.
2. Приведение системы к ступенчатому виду.
3. Теоремы о совместности и определенности систем линейных уравнений. Следствия.
4. Определители второго и третьего порядков. Вывод правила Крамера для систем из 2-х уравнений с двумя неизвестными.
5. Перестановки, транспозиции символов в перестановке.

Теорема о расположении перестановок в ряд. Следствие.
6. Порядки, инверсии, четность перестановки. Теорема о перемене четности на противоположную при транспозиции. Следствие.
7. Подстановки. Четность подстановки. Произведение подстановок. Свойства произведения.
8. Транспозиции, свойства. Теорема о разложении подстановки в произведение транспозиций. Следствия.
9. Циклы, свойства. Разложение подстановки в произведение циклов. Теорема о декременте.
10. Определители и их свойства.
11. Миноры и алгебраические дополнения. Лемма о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
12. Теорема Лапласа. Следствия.
13. Умножение элементов строки (столбца) на свои и чужие алгебраические дополнения.
14. Правило Крамера для системы из уравнений с неизвестными
15. Линейные арифметические пространства. Линейная зависимость. Свойства линейной зависимости и независимости. Линейные оболочки. Подпространства.
16. Базисы, эквивалентные определения, стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ . Лемма о линейно независимой системе, следствие.
17. Теорема о базисе. Размерность.
18. Ранг системы векторов. База системы векторов.
19. Ранг матрицы (горизонтальный, вертикальный, минорный). Теорема о равенстве рангов матрицы и матрицы, полученной из данной перестановкой строк (столбцов).
20. Теорема о равенстве горизонтального, вертикального и минорного рангов. Следствия.
<b>Семестр 2</b>

1. Аксиомы векторного пространства. Следствия из аксиом. Примеры векторных пространств. Подпространства, примеры.
2. Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.
3. Эквивалентные определения базиса, примеры. Конечномерные, бесконечномерные пространства.
4. Лемма о линейно независимой системе. Теорема о количестве векторов в базисе, размерность.
5. Теорема о дополнении до базиса. Свойство бесконечномерных пространств.
6. Теорема о монотонности размерности.
7. Координаты вектора в базисе, матрица перехода, ее невырожденность, формула изменения координат при переходе к новому базису.
8. База системы векторов и ранг системы векторов.
9. Сумма и пересечение подпространств, линейная оболочка объединения.
10. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств
11. Прямая сумма. Критерий прямой суммы.
12. Линейные отображения векторных пространств, свойства, примеры. Матрица линейного отображения в базисах. Матричная запись. Формула преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов.
13. Матрица линейного оператора. Матричная запись. Координаты образа вектора. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса.
14. Теорема о задании линейного отображения на базисе. Теорема о соответствии между линейными отображениями и матрицами.
15. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.
16. Инъективные линейные отображения.
17. Сумма линейных отображений, произведение на число, композиция. Их матрицы.
18. Обратное отображение, его матрица. Изоморфизм векторных пространств. Теорема об изоморфизме

конечномерных векторных пространств.

19. Алгебра линейных операторов. Эквивалентные условия невырожденности.

20. След матрицы, след линейного оператора.

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

#### 1 семестр

1. Теорема Кронекера-Капелли.

2. Общий метод исследования совместности и решения

системы линейных уравнений.

Следствия для однородных систем.

3. Однородные системы уравнений. Свойства, теорема о фундаментальной системе решений.

4. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной системы.

5. Сложение и умножение матриц. Свойства сложения и умножения.

6. Определитель произведения матриц.

7. Ранг произведения матриц.

8. Обратная матрица. Определение, необходимое и достаточное условие существования.

9. Алгебраические операции. Теорема об обобщенной ассоциативности. Группы, кольца, поля.

10. Определение поля комплексных чисел.

Алгебраическая форма. Свойства операции сопряжения.

11. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Свойства модуля.

12. Свойства степеней. Формула Муавра.

Извлечение корня $n$ -ой степени из комплексного числа.
13. Группа корней $n$ -ой степени из единицы.
14. Первообразные корни.
15. Делимость целых чисел. Свойства.
16. НОД и НОК. Свойства. Алгоритм Евклида.
17. Взаимно простые числа. Свойства, критерий взаимной простоты.
18. Простые числа и их свойства. Решето Эратосфена. Теорема Евклида.
19. Основная теорема арифметики, следствия из нее.
20. Построение кольца многочленов. Степень многочлена, свойства степени. Теорема о целостности кольца многочленов.
21. Делимость в кольце многочленов. Теорема о делении с остатком. Схема Горнера.
22. НОД и НОК. Существование НОД. Алгоритм Евклида нахождения НОД.
23. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты. Свойства.
24. неприводимые многочлены.
25. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых унитарных. Следствия.
26. Корни многочленов. Теорема Безу.
27. кратность корня. Теорема о количестве корней многочлена. Следствия.
28. Производная многочлена. Критерий кратности корня .

Связь между кратностью корня многочлена и кратностью данного корня в производной.
29. Алгебраически замкнутое поле, разложение на неприводимые над алгебраически замкнутым полем. Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ , разложение на неприводимые над $\mathbb{R}$ .
30. Комплексно сопряженные корни многочлена из $\mathbb{R}[x]$ .
31. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ . Разложение на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ .
32. Локализация корней. Лемма о модуле старшего члена. Следствия. Системы Штурма. Теорема Штурма. Теорема о существовании системы Штурма
<b>Семестр 2</b>
1. Инвариантные подпространства, собственные векторы. Собственные значения линейного оператора и корни характеристического многочлена. Инвариантность характеристического многочлена.
2. Теорема о линейной независимости собственных векторов.
3. Диагонализируемость линейного оператора.
4. $\lambda$ -матрицы, элементарные преобразования лямбда-матриц, эквивалентные лямбда-матрицы, каноническая форма.
5. Приведение лямбда-матрицы к каноническому виду элементарными преобразованиями.
6. Теорема о единственности канонического вида. Следствия. Инвариантные множители.
7. Унимодулярные лямбда-матрицы. Свойства.

<p>Эквивалентность элементарных преобразований</p> <p>лямбда-матриц и умножения на элементарные матрицы.</p>
8. Критерий эквивалентности лямбда -матриц.
9. Деление с остатком матричных многочленов.
10. Критерий подобия матриц.
11. Канонический вид характеристических матриц для жордановых клеток.
12. Канонический вид характеристических матриц для жордановых матриц. Критерий подобия жордановых матриц.
13. Приведение матрицы к жордановой нормальной форме. Критерий диагонализуемости.
14. Жорданова форма матриц 2-го и 3-го порядков.
15. Подстановка матрицы, оператора в многочлен, аннулирование многочлена, минимальный многочлен, примеры, свойство. Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли.
16. Билинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.
17. Симметрические, кососимметрические формы. Квадратичная форма, поляризация квадратичной формы, канонический вид.
18. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
19. Ранг квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ . Теорема об эквивалентности квадратичных форм над $\mathbb{C}$ .
20. Закон инерции квадратичных форм над $\mathbb{R}$ .
21. Сигнатура. Теорема об эквивалентности квадратичных форм над $\mathbb{R}$ .
22. Метод Якоби.
23. Положительно определенные квадратичные формы. Эквивалентные определения. Критерий Сильвестра.
24. Евклидовы пространства, скалярное произведение, свойства. Длина вектора, неравенство Коши-Буняковского, следствия, угол между векторами.
25. Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в о.н.б. Матрица Грама.
26. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

27. Существование о.н.б. Дополнение до о.н.б.
28. Ортогональное дополнение подпространства. Свойства.
29. Теорема об ортогональном дополнении, следствие. Ортогональные проекции, расстояния.
30. Изоморфизм евклидовых пространств.
31. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.
32. Теорема о соответствии между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве. Следствия.
33. Сопряженный оператор. Свойства. Матрица сопряженного оператора. Инвариантные подпространства относительно сопряженного.
34. Симметрические операторы и их свойства. Теорема об ортогональности собственных векторов симметрического оператора.
35. Теорема о спектре симметрического оператора.
36. Критерий симметрического оператора.
37. Теорема о диагонализируемости симметричной матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям.
38. Ортогональные операторы, их свойства, эквивалентные определения.
39. Матрица ортогонального оператора, свойства собственных чисел и собственных векторов ортогонального оператора.
40. Лемма о комплексном характеристическом корне ортогонального оператора, следствие.
41. Теорема об инвариантных подпространствах ортогонального оператора.
42. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора.
43. Унитарные пространства.
44. Двойственное пространство. Однозначность определения линейной функции на базисе.
45. Теорема о двойственном базисе, следствие. Канонический изоморфизм в евклидовом пространстве.
46. Канонический изоморфизм между пространством и дважды сопряженным.
47. Матрица перехода в двойственных базисах. Законы изменения координат векторов и ковекторов в

тензорных обозначениях.
48. Тензоры. Координаты тензора. Закон изменения координат тензора.
49. Операции над тензорами.
50. Разложимые тензоры.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

- 1) Вычислить  $\sqrt[3]{\frac{(1+i)^3(-\sqrt{3}+i)^6}{(-1-i)^3}}$   
 2) Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- 3) Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$$

$$g = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

- 4) Вычислить  $2A^{-1} - BA - 3E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5) Пользуясь схемой Горнера разделить  $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + 7$  с остатком на  $x+2$  и вычислить  $f(-2)$ .

- 6) Разложить многочлен  $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$  по степеням  $x-2$ . Определить кратность корня  $x_0 = 2$ .

- 7) Вычислить определитель, пользуясь теоремой Лапласа,

$$\begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

- 8) Исследовать совместность, найти общее решение и частное решение системы уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 3 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

- 9) Вычислить определитель

- 10) Найти общее решение и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

- 11) Вычислить  $\sqrt[4]{\frac{(1-i)^4(-1+i\sqrt{3})^{12}}{i^{11}}}$
- 12) Найти обратную матрицу для  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
- 13) Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & -11 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- 14) Найти максимальную линейно независимую подсистему системы векторов  $\begin{pmatrix} 7, 2, -9, 3, -19 \\ 2, 3, -5, 1, -8 \\ 3, 1, -4, 5, -12 \\ -2, -1, 3, -2, 7 \end{pmatrix}$
- 15) Найти значения многочлена  $f = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$  и всех его производных в точке  $x = -2$ .
- 16) Решить уравнение  $X \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Задача 1. Найти матрицу перехода от базиса  $v_1=(1, 1, 1), v_2=(1, 1, 0), v_3=(-1, 0, -1)$  к базису  $u_1=(1, 2, 0), u_2=(2, 2, 1), u_3=(2, 1, 2)$ .

Задача 2. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов  $\langle(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle$  и  $\langle(-1,-1,1,0),(2,2,0,1)\rangle$ .

Задача 3. Выяснить является ли преобразование пространства  $R^3$  линейным и если да, то найти его матрицу в базисе  $e_1=(1,1,1), e_2=(-1,1,1), e_3=(1,2,3)$ :

А)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$ .

12

Б)  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1x_2, x_3)$ .

Задача 4. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $v_1=(1, 0, 1), v_2=(0, 1, 1), v_3=(1, 1, 0)$  в векторы  $u_1=(4, 4, 5), u_2=(5, 3, 4), u_3=(3, 5, 3)$ , соответственно.

Задача 5. Линейный оператор  $F$  задан в базисе  $\{v_1=(1, 1, 0), v_2=(0, 1, 1), v_3=(1, 0, 1)\}$ :  $F(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3) = 2a_1v_1+2a_2v_2-2a_3v_3$ , где  $a_1, a_2, a_3$  – координаты вектора в базисе  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

Найти матрицу оператора  $F$  в базисе  $\{u_1, u_2, u_3\}$  и значение оператора  $F$  на векторе  $u=u_1+2u_2+u_3$ , где  $u_1=(1, 1, 1), u_2=(0, 1, 1), u_3=(0, 0, 1)$ .

Задача 6. Матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $a_1=(1, 1), a_2=(1, 0)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

(1, 0)

матрица оператора  $\psi$  в базисе  $b_1=(-1, -1)$ ,  $b_2=(1, 2)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу оператора  $\varphi + \psi$  в базисе  $\{b_1, b_2\}$ .

Задача 7. Найти базис ядра и образа оператора, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного

матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Задача 9. Является ли диагонализуемым линейный оператор над  $\mathbb{R}$ , заданный в стандартном

базисе матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задача 10. Найти жорданову форму матрицы  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задача 11. Найти нормальный вид в области вещественных чисел и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 12. Найти канонический вид и ортогональное преобразование, приводящее  $f$  к каноническому виду (приведение к главным осям).

### Задания повышенной сложности

1\*. Доказать, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждой матрицы-сомножителя.

2\*. Доказать, что многочлен, неприводимый над полем комплексных чисел, не может иметь кратных комплексных корней.

3\*. Доказать, что если две линейные функции на векторном пространстве имеют одинаковые ядра, то они различаются линейным множителем.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач
отлично	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов
очень хорошо	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов

Оценка	Критерии оценивания
хорошо	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами
удовлетворительно	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Курош Александр Геннадиевич. Курс высшей алгебры : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Приклад. математика". - Изд. 18-е, стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2011. - 432 с. : ил. - (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0521-3 : 800.03., 105 экз.
2. Проскуряков Игорь Владимирович. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие. - Изд. 11-е, стер. - СПб. : Лань, 2008. - 480 с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0707-1 : 465.00., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Винберг Эрнест Борисович. Курс алгебры. - Изд. 2-е, стер. - М. : Изд-во МЦНМО, 2013. - 593 с. : ил. - ISBN 978-5-4439-0209-8 : 500.00., 1 экз.
2. Кострикин Алексей Иванович. Введение в алгебру : учеб. для вузов. Ч. 1. Основы алгебры. - М. : Физматлит, 2000. - 272 с. - ISBN 5-9221-0017-3 : 70.00., 1 экз.
3. Кострикин Алексей Иванович. Введение в алгебру : учеб. для вузов. Ч. 2. Линейная алгебра. - М. : Физматлит, 2000. - 368 с. - ISBN 5-9221-0018-1 : 70.00., 1 экз.
4. Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : [учеб. пособие] / под ред. Д. В. Беклемишева. - Изд. 2-е, перераб. - М. : Физматлит, 2004. - 496 с. - ISBN 5-9221-0010-6 : 196.10., 36 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.lib.unn.ru/>

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.03 - Механика и математическое моделирование.

Автор(ы): Любимцев Олег Владимирович, доктор физико-математических наук.

Рецензент(ы): Титова Елена Борисовна.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.