

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Теория групп

Уровень высшего образования

Специалитет

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.01.02 Теория групп относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-11: Умение использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование	ПК-11.1: Знает теоретические основы физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике ПК-11.2: Умеет использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование для решения задач механики на основе полученных теоретических знаний ПК-11.3: Имеет практический опыт использования физических и компьютерных моделей и экспериментального оборудования при решении стандартных задач механики	ПК-11.1: Знания теоретических основ физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике. Знает основные подходы и методы построения решений задач групповой структуры. ПК-11.2: Умения анализировать и владеть основными алгоритмами теории групп для решения поставленных задач. ПК-11.3: Владения практическим опытом компьютерными методами теории групп.	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	

аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	43
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0
1. Группы.	19	6	6	12	7
2. Действие группы на множестве.	20	6	6	12	8
3. р-группы, разрешимые и простые группы.	18	6	6	12	6
4. Задание группы образующими и соотношениями.	22	6	6	12	10
5. Конечные и конечнопорожденные абелевы группы.	28	8	8	16	12
Аттестация	0				
КСР	1				1
Итого	108	32	32	65	43

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Группы. Определение группы, подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Гомоморфизмы групп. Ядро, образ гомоморфизма. Смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах групп.
2. Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы. Формула длины орбиты. Формула разложения на орбиты. Классы сопряженных элементов, формула классов. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Центр группы.
3. р-группы, разрешимые и простые группы. Теоремы Силова. Группы порядка p^q . Коммутант группы. Разрешимые и простые группы.
4. Задание группы образующими и соотношениями. Внешнее, внутреннее прямое произведение групп. Разложимые группы. Разложимость конечной циклической группы. Свободные группы. Универсальное свойство свободной группы. Задание группы образующими и соотношениями.
5. Конечные и конечнопорожденные абелевы группы. Конечные абелевы группы. Примарные группы. Элементарные делители примарной группы. Число неизоморфных примарных групп порядка p^n . Коэффициенты кручения конечной абелевой группы. Конечнопорожденные абелевы группы. Свободные

абелевы группы. Ранг свободной абелевой группы. Подгруппа кручения. Коэффициенты кручения конечнопорожденной абелевой группы.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Хорева Н.А., Чебочко Н.Г. "ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ I.". Практикум. 2010, ФЭОР. – URL: http://www.unn.ru/books/met_files/teor_gr.pdf
2. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Чебочко Н.Г. Задачи по теории групп. Ч. II. Практикум. 2015. ФЭОР. – URL: http://www.unn.ru/books/met_files/mulyar.pdf
3. Кузнецов М.И. "ЗАДАНИЕ ГРУПП ОБРАЗУЮЩИМИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ". Учебно-методическое пособие. 2014 ФЭОР. – URL: http://www.unn.ru/books/met_files/generators.pdf.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-11:

1. В циклической группе порядка 20 найти все элементы a , такие что $a^4 = e$ и все элементы порядка 4.
2. Найти классы сопряженных элементов в группе A_4 .
3. Выяснить какие из перечисленных циклических групп $\langle a \rangle$, порожденных элементом $a \in G$, изоморфны:
 - 1) $G = \mathbb{C}^*$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$;
 - 2) $G = \mathbb{C}^*$, $a = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$;
 - 3) $G = \mathbb{R}^*$, $a = -3\pi$;
 - 4) $G = \mathbb{C}^*$, $a = 7 - i$;
 - 5) $G = S_6$, $a = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)$;
 - 6) $G = \mathbb{Z}$, $a = -310$;
 - 7) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Найти все силовские 3-подгруппы в S_4 .
5. Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$.
6. Определить является отображение $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ гомоморфизмом групп или нет, найти ядро и образ:
 - а) $f(z) = |\bar{z}|^2$;
 - в) $f(z) = -|z|$;
 - с) $f(z) = 1$;
 - д) $f(z) = 3$.
7. Доказать изоморфизм $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^+ \cong T^1$.
8. Найти централизатор подстановки $(1\ 4\ 2)$ в S_4 .
9. Выяснить является множество с операцией группой или нет.
10. В группе $GL_2(\mathbb{R})$ найти централизатор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
11. Найти все гомоморфные отображения $\mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_{36}$.

12. Доказать, что группа $G = \langle a, b \mid a^8, b^2 a^2, b^{-1} a b a \rangle$ конечна.
13. Доказать, что группу S_3 можно задать следующими образующими и соотношениями: $\langle a, b \mid a^2, b^3, a^{-1} b a b^{-2} \rangle$.
14. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.
15. Найти левые и правые смежные классы в S_3 по подгруппе $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
16. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.
17. Изоморфны ли группы: $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{24}$?
18. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.
19. Доказать, что не существует простых групп порядка 80.
20. Найти количество элементов заданного порядка в заданной группе.
21. Найти все орбиты и стабилизаторы группы G , порожденной подстановкой
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$
- и действующей на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
22. Найти все подгруппы циклической группы порядка 36.
23. Найти нормальные подгруппы в S_4 .
24. Найти порядок элемента $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$.
25. Доказать изоморфизм $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решены все задачи. Допущено минимальное количество ошибок
не зачтено	Не решено большинство задач

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-11

1. Бинарная алгебраическая операция. Примеры. Теорема об обобщенной ассоциативности.
2. Определение группы, подгруппы. Эквивалентное определение подгруппы. Примеры.
3. Степени, свойства степеней. Порядок элемента. Свойства порядка.
4. Циклические группы. Теорема о порядке элемента и циклической подгруппы порожденной этим элементом. Следствия.
5. Теорема об изоморфизме циклических групп.
6. Теорема о подгруппах циклической группы.
7. Гомоморфизмы групп. Примеры. Свойства гомоморфизмов групп. Ядро, образ гомоморфизма. Изоморфизм групп.
8. Смежные классы по подгруппе (левые, правые). Примеры.
9. Индекс группы по подгруппе. Теорема Лагранжа, следствия.
10. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Каноническая проекция. Примеры.

11. Основная теорема о гомоморфизме. Следствие.
12. 1-ая теорема об изоморфизме.
13. Теорема о соответствии. Следствия.
14. Действие групп на множестве. Примеры. Эквивалентность определений действия групп на множестве.
15. Орбиты, стабилизаторы. Примеры. Сопряженность стабилизаторов элементов из одной орбиты.
16. Предложение о соответствии между элементами орбиты и множеством левых смежных классов по подгруппе. Формула длины орбиты.
17. Формула разложения на орбиты. Формула классов.
18. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Теорема Кэли.
19. Центр группы. Примеры. Свойства. Теорема о центре p -группы.
20. Порядки элементов в абелевой группе. Лемма о показателе.
21. Теорема Коши. Силовские подгруппы. Теоремы Силова. Следствие.
22. Свойства коммутанта. Примеры.
23. Разрешимые группы. Примеры. Свойства разрешимых групп.
24. Теорема о разрешимости p -группы. Группа порядка p^2 .
25. Внешнее, внутреннее прямое произведение. Теорема об эквивалентности определений внутреннего произведения групп.
26. Теорема о порядке произведения.
27. Следствие теоремы о порядке произведения. Теорема о разложимости циклической группы.
28. Теорема о разложении группы в прямую сумму силовских нормальных подгрупп.
29. Теорема о факторгруппе произведения.
30. Абелевы группы. Примарная подгруппа. Теорема о разложении в прямую сумму примарных подгрупп.
31. Лемма о представителе. Теорема о разложении примарной группы.
32. Теорема о единственности разложения примарной группы.
33. Элементарные делители примарной группы. Теорема об изоморфизме примарных групп. Число неизоморфных примарных групп порядка p^n .

34. Коэффициенты кручения. Основная теорема о конечных абелевых группах.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно».
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо».

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кострикин Алексей Иванович. Введение в алгебру : учеб. для студентов ун-тов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Прикладная математика". - Изд. 3-е. - М. : Физматлит, 2004. - (Классический университетский учебник : осн. в 2002 г. / МГУ им. М. В. Ломоносова ; ред. совет: В. А. Садовничий (пред.) [и др.]). - На обл. кн.: Посвящена 250-летию МГУ им. М. В. Ломоносова. Введение в алгебру . Ч. 2. Линейная алгебра. - 2004. - Изд. 3-е. - 368 с. - ISBN 5-9221-0488-8 : 157.00., 2 экз.
2. Курош Александр Геннадьевич. Курс высшей алгебры : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика". - 12-е изд., стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2003. - 432 с. : ил., граф. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0521-9 : 142.50., 120 экз.

Дополнительная литература:

1. Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : [учеб. пособие] / под ред. Д. В. Беклемишева. - Изд. 2-е, перераб. - М. : Физматлит, 2004. - 496 с. - ISBN 5-9221-0010-6 : 196.10., 36 экз.
2. Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. - Изд. 13-е, стер. - СПб. : Лань, 2001. - 288 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0427-1 : 33.07., 13 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.lib.unn.ru/>

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Любимцев Олег Владимирович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.