

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 6 от 31.05.2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Векторный и тензорный анализ

---

Уровень высшего образования  
Специалитет

---

Направление подготовки / специальность  
11.05.02 - Специальные радиотехнические системы

---

Направленность образовательной программы  
Радиотехнические системы и комплексы сбора и обработки информации

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2023 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.11 Векторный и тензорный анализ относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии	ОПК-1.1: Разбирается в основных разделах математических и естественнонаучных дисциплин. ОПК-1.2: Применяет основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований	ОПК-1.1: Знать: основные разделы математических и естественнонаучных дисциплин Уметь: разбираться в основных разделах математических и естественнонаучных дисциплин Владеть: навыками применения знаний по математическим и естественнонаучным дисциплинам при решении практических задач  ОПК-1.2: Знать: основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований Уметь: применять основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований Владеть: навыками применения основных законов	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи

		естественнонаучных дисциплин, методов математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>42</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Векторные функции	6	2	0	2	4
Тема 2. Криволинейные интегралы	20	6	8	14	6
Тема 3. Поверхностные интегралы	22	6	8	14	8
Тема 4. Теория поля	30	8	12	20	10
Тема 5. Градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в ортонормированных криволинейных координатах	11	4	2	6	5
Тема 6. Тензоры	8	2	2	4	4
Тема 7. Элементы дифференциальной геометрии	9	4	0	4	5

Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся направлена на выполнение домашних заданий по темам практических занятий, подготовку к контрольным работам по темам «Криволинейные и поверхностные интегралы» и «Задачи теории поля», а также подготовку к экзамену по указанной дисциплине. При подготовке к практическому занятию необходимо помнить, что данная дисциплина тесно связана с ранее изучаемыми дисциплинами «Математический анализ», «Алгебра и геометрия».

Цель самостоятельной работы - подготовка современного компетентного специалиста и формирование способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

На семинарских занятиях обучающийся должен уметь последовательно излагать свои мысли и аргументировано их отстаивать.

Для достижения этой цели необходимо:

- 1) ознакомиться с соответствующей темой программы изучаемой дисциплины;
- 2) осмыслить круг изучаемых вопросов и логику их рассмотрения;
- 3) изучить рекомендованную учебно-методическим комплексом литературу по данной теме;
- 4) тщательно изучить лекционный материал.

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

##### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

##### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Что можно сказать о кривизне кривой, заданной вектор-функцией? (Ответ: )

Оцените кручение кривой, заданной вектор-функцией . (Ответ: )

Какой тип имеют точки поверхности, заданной уравнением ? (Ответ: параболический)

Каков знак гауссовой кривизны поверхности, заданной уравнением ? (Ответ: )

Чему равен интеграл 2 рода по замкнутой кривой ? (Ответ: ).

Чему равен интеграл 2 рода по замкнутой поверхности ? (Ответ: ).

Является ли векторное поле в пространстве потенциальным? (Ответ: да).

Является ли векторное поле в пространстве соленоидальным? (Ответ: да).

Написать уравнение прямой, касающейся кривой, заданной вектор-функцией в точке .

Вычислить площадь тора, заданного вектор-функцией .

Вычислить вторую квадратичную форму поверхности .

Вычислить гауссову кривизну поверхности .

Вычислить криволинейный интеграл 1 рода , где  $C$  – дуга параболы , заключенной между точками  $A$  и  $B$  .

Показать, что интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислить его.

Вычислить поверхностный интеграл 1 рода , где  $M$  – часть плоскости , лежащая в первом октанте.

С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить интеграл , где  $M$  – внешняя сторона сферы, заданная уравнением .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями
отлично	Подготовка с некоторыми ошибками, уровень которой существенно выше среднего
очень хорошо	В целом хорошая подготовка с рядом заметных ошибок, принципиально не искажающих суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
хорошо	Хорошая подготовка с заметными ошибками, частично искажающими суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям
неудовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания.
плохо	Подготовка, совершенно недостаточная для понимания сути задачи (проблемы)

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			

<b>(индикатор достижения)</b>							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»

	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации

#### 5.3.1 Типовые задания, выносимые на промежуточную аттестацию:

#### Оценочное средство - Контрольные вопросы

#### Экзамен

#### Критерии оценивания (Контрольные вопросы - Экзамен)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями
отлично	Подготовка с некоторыми ошибками, уровень которой существенно выше среднего
очень хорошо	В целом хорошая подготовка с рядом заметных ошибок, принципиально не искажающих суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
хорошо	Хорошая подготовка с заметными ошибками, частично искажающими суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям
неудовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания.
плохо	Подготовка, совершенно недостаточная для понимания сути задачи (проблемы)

**Типовые задания (Контрольные вопросы - Экзамен) для оценки сформированности компетенции ОПК-1** (Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые

математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии)

1. Определение векторной функции одного и многих переменных.
2. Определение предела векторной функции по Коши и по Гейне. Свойства пределов векторных функций.
3. Непрерывность векторной функции. Действие с непрерывными функциями.
4. Дифференцируемые функции (4 случая).
5. Дифференцирование векторной функции одной переменной (определение и две теоремы). Геометрический смысл производной от векторной функции.
6. Определение частной производной векторной функции многих переменных. Теорема о существовании частных производных у дифференцируемой функции.
7. Определение производной по направлению. Теоремы о вычислении производных по направлению.
8. Интегрирование векторных функций.
9. Основной трехгранник кривой.
10. Система координат связанная с основным трехгранником. Координатные линии и координатные плоскости. Уравнение касательной, нормами, бинормали, нормальной плоскости, спрямляемой плоскости и соприкасающейся плоскости.
11. Формулы Френе. Понятие кривизны и кручения кривой.
12. Вычисление величины кривизны и кручения.
13. Вид кривой вблизи произвольной ее точки.
14. Определение поверхности. Способы задания поверхности. Простая поверхность, гладкая поверхность.
15. Нахождение нормали и касательной плоскости к поверхности.
16. Вычисление направляющих косинусов нормали к поверхности.
17. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.
18. Определение площади гладкой поверхности. Теорема о вычислении площади гладкой поверхности. Следствия.
19. Нормальные сечения поверхности и их кривизна. Вторая квадратичная форма.
20. Определение поверхностного интеграла 1-го типа. Теорема о вычислении.
21. Вывод формулы Остроградского.



22. Вывод формулы Стокса.
23. Односторонние и двусторонние поверхности. Сторона поверхности.
24. Определение поверхностного интеграла 2-го типа. Теорема о вычислении.
25. Определения: скалярное поле, поверхность уровня (ее свойства), предел функции от области, производная по объему (ее физический смысл).
26. Определение градиента скалярного поля. Теорема о вычислении. Следствие.
27. Свойства градиента.
28. Определение векторного поля. Векторная линия. Задача о нахождении векторной линии. Векторная трубка. Поток векторного поля. Векторный поток.
29. Дивергенция векторного поля. Теорема о вычислении. Инвариантный вид формулы Остроградского. Физический смысл дивергенции и формулы Остроградского.
30. Определение ротора векторного поля. Теорема о вычислении. Следствие.
31. Физический смысл ротора.
32. Оператор Гамильтона. Действия с вектором “набла”. Дифференциальные операторы, порожденные вектором “набла”.
33. Общая теорема Гаусса-Остроградского.
34. Потенциальное поле. Теорема о вычислении потенциала. Критерий потенциальности поля.
35. Циркуляция векторного поля. Инвариантный вид формулы Стокса.
36. Соленоидальное поле. Критерий соленоидальности поля. Свойства соленоидального поля.
37. Лапласово поле. Основная теорема векторного анализа (без доказательства). Дифференциальные операции второго порядка.
38. Основной и взаимный базисы. Ковариантные и контравариантные координаты вектора.
39. Определение криволинейных координат в пространстве. Координатные линии и координатные поверхности. Теорема о нахождении локальных базисов (основного и взаимного).
40. Определение ортогональных криволинейных координат. Критерий ортогональности. Элемент длины. Коэффициенты Ламе.
41. Вывести формулы в ортогональных криволинейных координатах для градиента и оператора Лапласа.
42. Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах.
43. Ротор в ортогональных криволинейных координатах.

44. Дифференциальные операции теории поля в сферических координатах
45. Дифференциальные операции теории поля в цилиндрических координатах.
46. Преобразования ортонормированных базисов.
47. Определение аффинного ортогонального тензора. Примеры: вектор, поверхность.
48. Линейный оператор в векторном пространстве как аффинный ортогональный тензор.
49. Тензорная символика.
50. Преобразование косоугольных базисов.
51. Общее определение тензора. Примеры.
52. Метрический тензор.
53. Тензорная алгебра. Сложение. Умножение. Свертка. Перестановка индексов. Симметрирование. Альтернация. Подъем и опускание индексов.

### **Оценочное средство - Задачи**

#### **Экзамен**

#### **Критерии оценивания (Задачи - Экзамен)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями
отлично	Подготовка с некоторыми ошибками, уровень которой существенно выше среднего
очень хорошо	В целом хорошая подготовка с рядом заметных ошибок, принципиально не искажающих суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
хорошо	Хорошая подготовка с заметными ошибками, частично искажающими суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям
неудовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания.
плохо	Подготовка, совершенно недостаточная для понимания сути задачи (проблемы)

## Типовые задания (Задачи - Экзамен) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

(Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии)

1. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа  $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ , где  $L$  – кривая, заданная уравнением:  $y = 1 - |1 - x|$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).
2. Не прибегая к формуле Остроградского, вычислить поверхностный интеграл 2-го типа  $\iint_S xdydz + ydzdx + zxdy$ , где  $S$  – внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
3. С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , где  $S$  – внешняя сторона границы куба  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$ .
4. Вычислить массу  $M$  сферы, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна квадрату расстояния этой точки до некоторой большой окружности сферы.
5. Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа  $\iint_S \frac{ds}{r^n}$ , где  $S$  – сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , а  $r$  – расстояние от точки сферы до фиксированной точки  $P$ , отстоящей от центра сферы на расстояние  $l$  ( $l > R$ ).
6. Найти производную поля  $u = \ln(x^2 + y^2)$  в точке  $M(x_0, y_0)$  по направлению, перпендикулярному к линии уровня поля  $u$ , проходящей через данную точку  $M(x_0, y_0)$ .
7. Показать, что напряженность поля  $\vec{F}(M)$  поля сил тяготения в точке  $M(x, y, z)$ , создаваемой массой  $m$ , сосредоточенной в точке  $O(0, 0, 0)$ , является градиентом скалярного поля.
8. В установившемся потоке несжимаемой идеальной жидкости скорость каждой частицы направлена к началу координат и по величине равна  $1/r^2$  ( $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы). Вычислить количество жидкости, вытекающей из области  $V$  за единицу времени.
9. Доказать, что  $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v)$ .
10. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + (x+y)\vec{k}$  вдоль окружности  $C$ , полученной пересечением цилиндра  $x^2 + y^2 = x + y$  плоскостью  $z = 1$ .
11. Найти векторные линии поля  $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ .
12. Показать, что центральное векторное поле  $\vec{A} = \frac{f(r)}{r}\vec{r}$  является потенциальным и найти его потенциал.
13. Привлекая формулу Стокса, вычислить поток ротора поля  $\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$  через часть поверхности  $z^2 = 4(1 - x^2 - y^2)^4$ , “накрывающей” начало координат плоскости  $xOy$ .
14. Доказать, что  $[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ . Во что трансформируется данное соотношение в случае, если поле  $\vec{A}$  – соленоидальное, потенциальное?
15. Найти поток векторного поля  $\vec{A} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$  из области  $V$ , ограниченной поверхностями  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z = 2$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кочин Николай Евграфович. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - Изд. 9-е. - М. : Наука, 1965. - 426 с. : черт. - 1.90., 4 экз.
2. Демидович Борис Павлович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для ун-тов пед. ин-тов. - 8-е изд., стер. - М. : Наука, 1972. - 544 с. : с черт. - 1.00., 32 экз.

3. Буда́к Борис Михайлович. Кратные интегралы и ряды : [учеб. для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов]. - Изд. 2-е, стер. - М. : Наука, 1967. - 607 с. : черт. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова [и др.] ; вып. 2). - 1974.00., 103 экз.

Дополнительная литература:

1. Арфкен Г. Математические методы в физике / сокр. пер. с англ. В. В. Чепкунова. - М. : Атомиздат, 1970. - 712 с. - 3.42., 2 экз.
2. Гольдфайн И. А. Векторный анализ и теория поля / под ред. Р. Г. Гутера. - 2-е изд. - М. : Наука, 1968. - 128 с. - 0.22., 1 экз.
3. Рашевский Петр Константинович. Риманова геометрия и тензорный анализ. - Изд. 3-е. - М. : Наука, 1967. - 664 с. : черт. - 2.63., 58 экз.
4. Джеффрис Гарольд. Методы математической физики : [в 3 вып.] : пер. с англ. Вып. 1 / под ред. В. Н. Жаркова. - М. : Мир, 1969. - 424 с. : с черт. - 1.74., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

[http://www.unn.ru/books/met\\_files/OVTA.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/OVTA.pdf)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по специальности 11.05.02 - Специальные радиотехнические системы.

Автор(ы): Малкин Михаил Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 25 мая 2023 г., протокол № 04/23.