

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
(протокол от 14.12.2021 г. №4)

**Рабочая программа дисциплины**

*Компьютерная геометрия и  
геометрическое моделирование*

---

Уровень высшего образования  
*бакалавриат*

---

Направление подготовки / специальность

*01.03.01 Математика*

---

Направленность образовательной программы  
*Общий профиль*

---

Форма обучения  
*Очная*

---

Нижний Новгород  
2022 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» (Б1.О.28) относится к обязательной части ООП по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», формируемой участниками образовательных отношений. Дисциплина преподается в 5 семестре.

| № варианта | Место дисциплины в учебном плане образовательной программы | Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД  |
|------------|--|--|
| 1          | Блок 1. Дисциплины (модули)<br>Обязательная часть          | Дисциплина Б1.0.28, «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика |

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)  | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции   |  | Наименование оценочного средства           |
|--|---|--|--|
|  | Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине  |  |
| ПК-4: Способен собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в математической и информационно-аналитической области исследований | ПК-4.1. Знать методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в математической и информационной области исследований<br>ПК-4.2. Уметь применять методы анализа научно-технической информации<br>ПК-4.3. Владеть навыками решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач | Знать определения и основные свойства линейных, аффинных и проективных отображений, формулы наиболее важных отображений.<br>Знать определения и основные свойства кривых Безье.<br>Знать определения, основные свойства и алгоритм построения триангуляции Делоне и диаграммы Вороного.<br>Знать определение и свойства кубического сплайна<br>Знать основные краевые условия для кубических сплайнов.<br>Уметь находить матрицы линейных и аффинных отображений.<br>Уметь переводить мировые координаты двумерной фигуры в экранные.<br>Владеть навыками построения | Собеседование, контрольные работы, проекты |

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
|  |  | изображение трехмерного объекта на экране компьютера.<br>Уметь находить формулы кубического сплайна для данных краевых условий. |  |
|--|--|---|--|

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

|   |                      |
|---|----------------------|
|   | Очная форма обучения |
| Общая трудоемкость                        | 4 ЗЕТ                |
| Часов по учебному плану                   | 144                  |
| в том числе                               |                      |
| аудиторные занятия (контактная работа):   | 66                   |
| - занятия лекционного типа                | 32                   |
| - занятия семинарского типа               | 32                   |
| - занятия лабораторного типа              |                      |
| - текущий контроль (КСР)                  | 2                    |
| самостоятельная работа                    | 42                   |
| Промежуточная аттестация – зачет, экзамен | 36                   |

#### 3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины | Всего (часы) | В том числе   |                           |                            |       |   |
|---|--------------|---|---------------------------|----------------------------|-------|---|
|   |              | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них |                           |                            |       | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|   |              | Занятия лекционного типа  | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего |   |
| 1. Линейные и аффинные отображения                          | 42           | 10  | 10                        |                            | 20    | 12  |
| 2. ООП в Java   | 20           | 6   | 6                         |                            | 12    | 14  |
| 3. Кривые Безье, кубические сплайны                         | 16           | 6   | 6                         |                            | 12    | 4   |
| 4. В-сплайны  | 16           | 6   | 6                         |                            | 12    | 4   |
| 5. Триангуляция Делоне, диаграммы Вороного                  | 11           | 4   | 4                         |                            | 8     | 8   |
| Текущий контроль (КСР)                                      | 2            |   |                           |                            | 3     |   |
| Промежуточная аттестация – экзамен, зачет                   | 36           |   |                           |                            |       |   |
| Итого   | 144          | 32  | 32                        |                            | 67    | 42  |

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов и контрольных работ на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет, экзамен).

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

### **3.3. Содержание разделов дисциплины**

1. Линейные и аффинные отображения, их матрицы. Аффинные комбинации и барицентрические координаты. Параллельные проекции. Проективные пространства, проективные отображения, их матрицы. Центральные проекции.
2. Объектно-ориентированное программирование в Java. Пиксельная и векторная графика в Java. Анимация и иерархическое моделирование.
3. Кривые Безье, полиномы Бернштейна. Кубические сплайны.
4. Рациональные кривые Безье. В-сплайны. Неравномерные рациональные В-сплайны (NURBS).
5. Триангуляция Делоне и диаграммы Вороного. Алгоритм построения триангуляции Делоне.

### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа включает выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением, изучение литературы и проработку теоретического материала лекционных занятий.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента указан в разделе 6.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | Шкала оценивания сформированности компетенций   |   |   |   |  |  |  |
|--|---|---|---|---|--|--|--|
|  | плохо   | неудовлетворительно   | удовлетворительно   | хорошо  | очень хорошо   | отлично  | превосходно  |
|  | Не зачтено  |   | Зачтено   |   |  |  |  |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.                          | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок                                | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.   | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.   |
| <u>Умения</u>  | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа              | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u>  | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа            | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.                                      | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами   | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.  | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.  | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.   |

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка  |             | Уровень подготовки   |
|---------|-------------|--|
| зачтено | Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |

|            |                     |  |
|------------|---------------------|--|
|            | Отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»                     |
|            | Очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»           |
|            | Хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»                       |
|            | Удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»  |
|            | Плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Вопросы к экзамену для проверки ПК-4

1. Переход к новому базису: его матрица, связь между старыми и новыми координатами вектора. Матрица композиции переходов и обратного перехода.
2. Линейное отображение: его матрица, связь между координатами образа и прообраза. Матрица отображения в другом базисе. Матрица композиции отображений.
3. Точечные аффинные пространства. Координаты в аффинных пространствах. Переход к новому реперу, связь между старыми и новыми координатами точки.
4. Аффинные отображения, их действие на векторах. Сохранение координат при аффинных отображениях. Связь между координатами образа и прообраза.
5. Однородные координаты. Матрица перехода к новому реперу, матрица аффинного отображения и обратного отображения в однородных координатах.
6. Аффинные комбинации точек (барицентры), их независимость от выбора системы координат. Деление отрезка в данном отношении как нахождение аффинной комбинации.
7. Барицентрическая система координат. Связь между обычными и барицентрическими координатами. Инвариантность аффинных комбинаций точек при аффинных отображениях.
8. Простые аффинные отображения на плоскости и в пространстве: поворот вокруг начала (осей) координат, симметрия относительно осей координат (координатных плоскостей), масштабирование, наклон, параллельный перенос, проекция вдоль осей координат. Их матрицы, геометрический смысл коэффициентов матриц.
9. Представление аффинного преобразования в виде композиции простых преобразований с целью нахождения его матрицы, примеры.
10. Преобразование мировых координат в экранные, примеры.
11. Классификация и свойства параллельных проекций. Матрица косоугольной проекции.
12. Матрица ортогональной проекции. Изометрия, диметрия и триметрия.

13. Проективное пространство, порожденное векторным пространством. Расширенная плоскость. Проективная система координат, проективные отображения.
14. Центральная проекция как проективное отображение, его матрица и свойства.
15. Объектно-ориентированное программирование на Java: классы, объекты, поля, методы, конструкторы, статические поля и методы.
16. Наследование в Java: классы, абстрактные классы и интерфейсы. Примеры из пакета `java.awt.geom`. Использование подкласса `JPanel` для рисования.
17. Методы класса `java.awt.Graphics` для рисования, используемые в них координаты. Графический контекст.
18. Векторная графика в Java: пакет `java.awt.geom`, интерфейс `java.awt.Shape`, классы `java.awt.Graphics2D`, `java.awt.geom.Path2D` и `java.awt.geom.AffineTransform`.
19. Виды вложенных классов. Использование вложенных классов для получения ввода от мыши и событий от таймера.
20. Полярные формы, их существование. Построение параметрических полиномиальных кривых с помощью алгоритма де Кастельжо.
21. Получение полиномов Бернштейна при вычислении полярных форм. Определение кривых Безье для заданного набора контрольных точек с помощью полиномов Бернштейна.
22. Свойства полиномов Бернштейна: график, начальная и конечная точки, неотрицательность на  $[0, 1]$ , симметричность, равенство суммы единице.
23. Свойства кривых Безье: принадлежность выпуклой оболочке контрольных точек, рекурсивное свойство, инвариантность при аффинных отображениях.
24. Производная кривой Безье.
25. Увеличение степени кривой Безье.
26. Кубический сплайн. Вычисление производных в промежуточных узлах.
27. Кубический базис Эрмита. Матрицы перехода между этим базисом и кубическим базисом Бернштейна, а также стандартным (т.е. степенным) базисом.
28. Диаграмма Вороного для множества точек. Ячейка точки, её представление в виде пересечения полуплоскостей, выпуклость ячейки. Максимальное количество общих граней у двух ячеек. Характеризация вершин диаграммы Вороного.
29. Мотивация для триангуляции Делоне. Допустимые и оптимальные триангуляции. Характеризация допустимых триангуляций в терминах описанных окружностей.
30. Триангуляция Делоне, её допустимость и оптимальность в случае общего расположения точек.
31. Итеративный алгоритм построения триангуляции Делоне, его корректность.

#### **5.2.2. Задачи для оценки сформированности компетенции ПК-4**

1. Найти матрицу поворота на угол  $\alpha$  вокруг прямой, проходящей через начало координат, если она образует угол  $\theta$  с плоскостью  $Oxy$ , а ее ортогональная проекция на эту плоскость образует угол  $\varphi$  с осью  $Ox$ .
2. Доказать алгебраически следующие факты.

1. Композиция симметрий относительно параллельных прямых есть параллельный перенос на вектор, перпендикулярный обеим прямым, длина которого есть удвоенное расстояние между прямыми.
2. Композиция симметрий относительно пересекающихся прямых есть поворот на удвоенный угол между прямыми вокруг точки пересечения прямых.
3. Отношение высоты к ширине листа бумаги любого формата серии А (например, А4) равно  $\sqrt{2} \approx 1,414$ . Это позволяет в точности разместить две уменьшенные и повернутые на 90 градусов копии страницы на одной странице. Найти матрицы этих аффинных отображений по отношению к реперам, задающим систему координат на странице (начало координат находится в левом нижнем углу).
4. В мировой системе координат, где единицами измерения служат метры, задана фигура. Требуется изобразить ее в окне, имеющем высоту  $h$  пикселей, границу шириной  $p$  пикселей и разрешение  $r$  пикселей на сантиметр. Изображение должно быть выполнено в масштабе  $m$  метров в одном сантиметре и располагаться в левом нижнем углу окна.
5. Краевые условия для нормализованного кубического сплайна заданы следующим образом:  $2f''_0(0) = f''_0(1)$  и  $f''_{n-2}(0) = 2f''_{n-2}(1)$ . Выписать систему уравнений в матричном виде на производные  $p'_0, \dots, p'_{n-1}$  в узлах сплайна для  $n = 5$ .

### 5.2.3. Программные проекты для проверки умений и навыков ПК-4

Используя заготовки, предоставленные преподавателем, написать следующие программы

1. Программа, рисующая заданное в мировых координатах изображение так, чтобы оно занимало всю ширину и/или высоту окна.
2. Программа, соединяющая точки на экране кубическим сплайном.
3. Программа, рисующая с помощью анимации вид из окна движущейся машины.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

1. Макаров Е.М. Элементы двумерной графики в Java: учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. Рег. № 1491.17.06.  
[http://www.unn.ru/books/met\\_files/graphics-java.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/graphics-java.pdf)
2. Шульц М.М. Аналитическая и вычислительная геометрия. — Нижний Новгород, 2010. 100 экз.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 2: линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2001. 61 экз.

### б) дополнительная литература:

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. — М.: Мир, 1989. 10 экз.
2. Боресков А.В., Шикин Е.В. Компьютерная графика. — М.: Юрайт, 2017. — 219 с.  
<https://biblio-online.ru/book/D39797BE-488C-4EC5-AFE8-F60AE1B9C750>



**в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование 3 курс (математика)»,

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4490>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>

Комплект разработчика Java

<http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/jdk9-downloads-3848520.html>

Интегрированная среда разработки IntelliJ IDEA, Community Edition

<https://www.jetbrains.com/idea/download/>

Документация по библиотекам языка Java

<https://docs.oracle.com/javase/9/docs/api/overview-summary.html#JavaSE>

**7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: компьютерами и проектором.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ — бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Авторы: Ph.D., ст. преп. Макаров Е.М.

Рецензент (ы)

Зав кафедрой, д.ф.м.н., проф. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 01.12.2021 №2.