

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Прикладной функциональный анализ

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.09.01 Прикладной функциональный анализ относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1:</p> <p>Знать:</p> <p>основные понятия анализа:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Нулевая мера. Условие «почти всюду». 2. Определение интеграла Лебега, его свойства. <p>Пространство</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Понятия двойного и повторного интегралов Лебега. Теорема Фубини. 4. Измеримые множества и функции. 5. Определение МП и метрической группы, свойства расстояния. 6. Предел. Смысл предела в некоторых конкретных МП. 7. Плотные множества. Примеры всюду плотных множеств функций. 8. Сепарабельное МП. Сепарабельность подмножества. 9. Сходящиеся в себе последовательности. Полное МП. 10. Непрерывные операции. Липшиц-непрерывные операции. 11. Принцип сжимающих отображений в полном МП. 12. Линейное пространство. Линейно независимые системы. 13. Предел в ЛНП. Непрерывность нормы и 	Задания	Зачёт: Контрольные вопросы

		<p>арифметических действий.</p> <p>14. Полная система элементов. Примеры полных систем функций.</p> <p>15. Линейный ограниченный оператор.</p> <p>16. Норма оператора, формулы для нормы. Примеры оценки нормы.</p> <p>17. Принцип сжимающих отображений для линейного уравнения в B-пространстве.</p> <p>18. Оценки норм композиции и итерации.</p> <p>19. Ряд линейных ограниченных операторов. Ряд итераций.</p> <p>20. Условия существования и ограниченности обратного оператора.</p> <p>21. Критерий линейной независимости системы элементов.</p> <p>22. Гильбертово пространство (H-пространство).</p> <p>23. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых элементов.</p> <p>24. Теорема о разложении элемента в ряд Фурье в сепарабельном H-пространстве.</p> <p>25. Ортогональное дополнение.</p> <p>26. Собственные векторы и числа (значения) самосопряженного оператора.</p> <p>27. Собственное подпространство самосопряженного компактного оператора.</p> <p>Производные по Фреше и Гато. Свойства сильной производной.</p> <p>ПК-13.2: Владеть: - аппаратом прикладного функционального анализа: - навыками использования</p>		
--	--	--	--	--

		<p>математических методов обработки информации.</p> <p>ПК-13.3: Уметь: -использовать на практике знания, полученные при изучении дисциплины «Прикладной функциональный анализ 1»:</p> <p>1. Определять обладает ли рассматриваемая характеристика пары элементов пространства свойствами метрики.</p> <p>2. Проверять применимость и применять к приближенному решению принцип сжимающих отображений.</p> <p>3. Проверять ортогональность заданной системы элементов и, в случае ее полноты, раскладывать по данной системе элемент в ряд Фурье.</p> <p>4. Решать линейные интегральные уравнения.</p> <p>ПК-13.4: Владеть: - аппаратом прикладного функционального анализа: - навыками использования математических методов обработки информации.</p>		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	1
самостоятельная работа	39

Промежуточная аттестация	0 Зачёт
--------------------------	------------

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1 Основные сведения из ФА Краткий обзор основных понятий математического и функционального анализа, линейной алгебры. Примеры приближенного решения стандартных уравнений.	10	2	2	4	6
Тема 2 Метод сжимающих отображений. Липшиц-непрерывность. Теорема о модифицированном методе сжимающих отображений.	10	2	2	4	6
Тема 3 Применение метода сжимающих отображений. Применение метода сжимающих отображений к решению различных задач.	12	3	3	6	6
Тема 4 Аппроксимация уравнений в подпространствах. Теорема о методе аппроксимации линейного уравнения в подпространствах, условия сходимости, оценка погрешности.	13	3	3	6	7
Тема 5 Схема аппроксимации для интегрального уравнения. Применение схема аппроксимации уравнения в подпространствах к решению интегрального уравнения.	13	3	3	6	7
Тема 6 Метод Фурье. Применение частичных сумм ряда Фурье к аппроксимации линейного интегрального уравнения. Условия сходимости метода, вид уравнений для поиска коэффициентов.	13	3	3	6	7
Аттестация	0				
КСР	1				1
Итого	72	16	16	33	39

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Краткий обзор основных понятий математического и функционального анализа, линейной алгебры. Примеры приближенного решения стандартных уравнений.
- 2 Метод сжимающих отображений
Липшиц-непрерывность. Теорема о модифицированном методе сжимающих отображений.
3. Применение метода сжимающих отображений к решению различных задач
4. Линейные операторы. Понятие линейного оператора. Ограниченный оператор. Непрерывность. Норма оператора. Примеры интегральных операторов и оценки их нормы.
5. Аппроксимация уравнений в подпространствах. Теорема о методе аппроксимации линейного уравнения в подпространствах, условия сходимости, оценка погрешности.
- 6.Схема аппроксимации для интегрального уравнения. Применение схема аппроксимации уравнения в подпространствах к решению интегрального уравнения.

7. Гильбертово пространство. Понятие скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Примеры базисов. Понятие сепарабельного гильбертова пространства.
8. Метод Фурье. Применение частичных сумм ряда Фурье к аппроксимации линейного интегрального уравнения. Условия сходимости метода, вид уравнений для поиска коэффициентов.
9. Метод Ритца. Метод наименьших квадратов. Задача поиска минимума функционала. Теорема о сходимости метода, оценка погрешности. Квадратный корень из оператора. Метод Ритца. Пример применения метода Ритца.
10. Метод наискорейшего спуска. Самосопряженные операторы. Построение процесса приближений в методе наискорейшего спуска.
11. Необходимые условия оптимального управления. Необходимое условие экстремума дифференцируемого функционала. Сильное дифференцирование композиции операций. Необходимые условия оптимального управления в гладкой задаче на открытом множестве.
12. Достаточные условия оптимального управления. Полунепрерывные функционалы. Достаточные условия минимума функционала и минимизирующей последовательности. Достаточные условия оптимального управления.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Прикладной функциональный анализ-1 ДО, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=829>.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

1. Привести сведения из линейного и нелинейного функционального анализа в метрических, нормированных, унитарных и частично упорядоченных пространствах, указать взаимосвязь основных понятий.
2. Сформулировать модифицированный метод сжимающих отображений в полном метрическом пространстве и в шаре. Привести примеры применения метода к интегральным уравнениям.
3. Сформулировать метод аппроксимации линейного уравнения в подпространствах линейного нормированного пространства (ЛНП). Показать сходимость метода в серии подпространств, указать оценку погрешности.
4. Сформулировать понятие корректности линейной математической модели в ЛНП, понятие Липшицевой устойчивости решения линейного уравнения относительно возмущения обеих частей уравнения

5. Построить полиномы Лежандра и алгебраический ряд Фурье.
6. Привести построение базиса в гильбертовом пространстве интегрируемых с квадратом по Лебегу функций двух переменных. Сформулировать метод Фурье (метод моментов) приближенного решения линейных операторных и интегральных уравнений.
7. Сформулировать метод наименьших квадратов в унитарном пространстве. Показать сходимость метода, оценку погрешности.
8. Сформулировать понятие квадратного корня из самосопряженного положительно определенного оператора.
9. Описать применение метода Рунге в гильбертовом пространстве и указать оценку его сходимости.
10. Привести модифицированный метод наискорейшего спуска в гильбертовом пространстве и указать его сходимость, оценку погрешности

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в

	ответа		Выполнены все задания, но не в полном объеме	ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

Вопрос

1.	Краткий обзор основных понятий математического и функционального анализа, линейной алгебры. Примеры приближенного решения стандартных уравнений.
2	Метод сжимающих отображений
	Липшиц-непрерывность. Теорема о модифицированном методе сжимающих отображений.
3.	Применение метода сжимающих отображений к решению различных задач
4.	Линейные операторы. Понятие линейного оператора. Ограниченный оператор. Непрерывность. Норма оператора. Примеры интегральных операторов и оценки их нормы.
5.	Аппроксимация уравнений в подпространствах. Теорема о методе аппроксимации линейного уравнения в подпространствах, условия сходимости, оценка погрешности.
6.	Схема аппроксимации для интегрального уравнения. Применение схема аппроксимации уравнения в подпространствах к решению интегрального уравнения.
7.	Гильбертово пространство. Понятие скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Примеры базисов. Понятие сепарабельного гильбертова пространства.
8.	Метод Фурье. Применение частичных сумм ряда Фурье к аппроксимации линейного интегрального уравнения. Условия сходимости метода, вид уравнений для поиска коэффициентов.
9.	Метод Ритца. Метод наименьших квадратов. Задача поиска минимума функционала. Теорема о сходимости метода, оценка погрешности. Квадратный корень из оператора. Метод Ритца. Пример применения метода Ритца.
10.	Метод наискорейшего спуска. Самосопряженные операторы. Построение процесса приближений в методе наискорейшего спуска.
11.	Необходимые условия оптимального управления. Необходимое условие экстремума дифференцируемого функционала. Сильное дифференцирование композиции операций. Необходимые условия оптимального управления в гладкой задаче на открытом множестве.
12.	Достаточные условия оптимального управления. Полунепрерывные функционалы. Достаточные условия минимума функционала и минимизирующей последовательности. Достаточные условия оптимального управления.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

Оценка	Критерии оценивания

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Функциональный анализ и вычислительная математика / Лебедев В.И. - Москва : Физматлит, 2005., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=634775&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Каримов З. Ш. Функциональный анализ в задачах Задачник-практикум и методические указания для студентов специальности «Математика»: методические указания / Каримов З. Ш. - Уфа : БГПУ имени М. Акмуллы, 2016. - 64 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции БГПУ имени М. Акмуллы - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=716570&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кротов Николай Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.