

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Математическая теория динамического хаоса

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.13 Математическая теория динамического хаоса относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: ЗНАТЬ основные термины, определения и результаты теории динамического хаоса.  УК-1.2: УМЕТЬ применять эти и аналогичные методы при исследовании конкретных динамических систем.  УК-1.3: ВЛАДЕТЬ аналитическими (качественными) и численными методами исследования систем со сложной динамикой.	Собеседование Задания	Зачёт: Контрольные вопросы
ОПК-2: Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1: Знает математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении ОПК-2.2: Умеет модифицировать, анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1: ЗНАТЬ основные определения и результаты математической теории динамического хаоса.  ОПК-2.2: УМЕТЬ применять полученные знания при изучении конкретных динамических систем со сложным поведением траекторий.	Собеседование Задания	Зачёт: Контрольные вопросы

	ОПК-2.3: Владеет навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.3: ВЛАДЕТЬ методами компьютерного моделирования динамических систем со сложным поведением траекторий.		
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b>
	<b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Введение	19	2	2	4	15
Тема 2. Странные аттракторы многомерных потоков	21	3	3	6	15
Тема 3. Странные аттракторы дискретных динамических систем (диффеоморфизмов)	21	3	3	6	15
Тема 4. Смешанная динамика	23	4	4	8	15
Тема 5. Хаотическая динамика математических моделей естествознания	23	4	4	8	15
Аттестация	0				
КСР	1			1	

Итого	108	16	16	33	75
-------	-----	----	----	----	----

## Содержание разделов и тем дисциплины

Введение.

Странные аттракторы многомерных потоков

Странные аттракторы дискретных динамических систем (диффеоморфизмов)

Смешанная динамика

Хаотическая динамика математических моделей естествознания

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Математическая теория динамического хаоса (Малкин М.И.)" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=2839>).

### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

#### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

##### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-1:

Вопросы для оценки компетенции «УК-1»:

1. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем. Показать, что линейный узел сопряжен линейному фокусу в двумерном случае.
2. Почему период периодических точек сохраняется при топологической сопряженности? Показать, что у топологически сопряженных систем одинаковое число периодических точек.
3. Привести примеры следующих инвариантных множеств динамической системы: альфа-и-омега-предельное множество, множество рекуррентных (устойчивых по Пуассону) траекторий, неблуждающее множество.
4. Сформулировать теорему Шильникова об окрестности грубой гомоклинической траектории.
5. Дать символическое описание неблуждающего множества в подкове Смейла.
6. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем. Показать, что линейный узел сопряжен линейному фокусу в двумерном случае.
7. Почему период периодических точек сохраняется при топологической сопряженности? Показать, что у топологически сопряженных систем одинаковое число периодических точек.
8. Привести примеры следующих инвариантных множеств динамической системы: альфа-и-омега-предельное множество, множество рекуррентных (устойчивых по Пуассону) траекторий, неблуждающее множество.

##### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

Вопросы для оценки компетенции «ОПК-2»:

1. Определение аттрактора по Рюэлю. CRN-аттрактор. Полный аттрактор. Аналогичная теория — для репеллеров. Привести примеры CRN-аттракторов.
2. Гомоклинические и гетероклинические траектории. Критерии хаоса по Пуанкаре и спирального хаоса по Шильникову. Сформулировать теорему Шильникова.
3. Условия гиперболичности и подковы Смейла. Гиперболические аттракторы: определение и примеры. Дать символическое описание неблуждающего множества в подкове Смейла.
4. Квазиаттракторы: определение и примеры. Аттракторы в отображении Эно. Построить на компьютере аттрактор Эно при  $b=0.1$  и  $b=-0.3$ .
5. Настоящие аттракторы. Дикие гиперболические и псевдогиперболические аттракторы. Определения и примеры. Дикий спиральный аттрактор Тураева-Шильникова. Дать определение гиперболических и псевдогиперболических инвариантных множеств, сравнить динамические свойства таких множеств.
6. Трехмерные обобщенные отображения Эно. Исследовать основные бифуркации неподвижных точек в случае конкретного примера, данного преподавателем: а) седло-узловая бифуркация; б) бифуркация удвоения периода; в) бифуркация Андронова-Хопфа.
7. Метод карт седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно. Построить карту седел для разных значений якобиана  $B$ . Например, для а)  $B=0.1$ ; б)  $B=0.5$ ; в)  $B=1$ .
8. Дать определение показателей Ляпунова. Объяснить суть метод диаграмм Ляпунова и его компьютерной реализации. Объяснить типы динамики отображения на примере его диаграммы Ляпунова (для случае двухпараметрического семейства трехмерных отображений Эно), диаграмма дается преподавателем.

## Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы на вопросы верны или допущены незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки.

### 5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Сформулировать теорему Андронова-Леонтович о рождении устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седла. Дать ее геометрическое доказательство. Дополнительные вопросы:
  - 1) Сформулировать теорему Шильникова о рождении устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седла многомерной системы.
  - 2) Сформулировать теорему Андронова-Витта о рождении устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла. Как выглядит ее многомерный аналог – теорема Шильникова?
2. Дать описание феноменологического сценария Шильникова возникновения спирального аттрактора в случае однопараметрических семейств трехмерных потоков.
3. Дать описание феноменологических сценариев возникновения
  - 1) дискретного аттрактора Лоренца;
  - 2) дискретного восьмерочного аттрактора;
  - 3) дискретного спирального аттрактора
 в случае однопараметрических семейств ориентируемых трехмерных трехмерных отображений.
4. Построить на компьютере аттрактор Эно при  $b=0.1$  и  $b=-0.3$ .

### 5.1.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Показать, что состояние равновесие, точка на предельном цикле, гомоклиническая точка (точка на петле сепаратрисы седла) являются неблуждающими. Определить какие из этих точек не являются устойчивыми по Пуассону.
2. С помощью теории центральных многообразий исследовать бифуркацию двумерной системы в случае, когда она имеет при нулевом значении параметра состояние равновесия с одним нулевым корнем (пример системы дается преподавателем).
3. С помощью формулы Баутина определить тип бифуркации Андронова-Хопфа двумерной системы, имеющей при нулевом значении параметра состояние равновесия типа сложный фокус (пример системы дается преподавателем).
4. По данным диаграмме показателей Ляпунова и карте седел на плоскости параметров дать качественное описание динамики в различных областях.
5. Метод карт седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно. Построить карту седел для разных значений якобиана B: а)  $B=0.1$ ; б)  $B=0.5$ ; в)  $B=1$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задания выполнены верно или с незначительными ошибками.
не зачтено	Задания не выполнены или допущены грубые ошибки.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи.

	отказа обучающегося от ответа	место грубые ошибки	негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1**

Что такое динамическая система? Что такое каскады и потоки?	УК-1
Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем.	УК-1
Почему топологически сопряженные системы имеют одинаковые периоды периодических точек?	УК-1
Дайте определения следующих инвариантных множеств динамической системы: альфа- и омега-предельное множество, множество рекуррентных (устойчивых по Пуассону) <u>множеств</u> , <u>неблуждающее</u> множество.	УК-1
Транзитивные и цепно-транзитивные системы. Траектории и $\varepsilon$ -траектории дискретной динамической системы. Приведите примеры транзитивных и цепно- <u>транзитивных систем</u> .	УК-1
Аттрактор и репеллер. Поглощающая область и максимальный аттрактор.	УК-1
Определение аттрактора по <u>Рюэлю</u> . СРН-аттрактор. Полный аттрактор. Аналогичная теория — для репеллеров.	УК-1
Теорема <u>Конди</u> о существовании аттрактора и репеллера у системы на компактном фазовом пространстве.	УК-1
Гомоклинические и гетероклинические траектории. Критерии хаоса по Пуанкаре и спирального хаоса по <u>Шильникову</u>	УК-1

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

Метод карт седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно.	ОПК-2
Определение показателей Ляпунова. Метод диаграмм Ляпунова и его компьютерные реализации. Объяснение типов динамики отображения на примере его диаграммы Ляпунова (в случае двухпараметрического семейства трехмерных отображений Эно).	ОПК-2
Спиральные аттракторы. Теория Шильникова. Описание феноменологического сценария возникновения спирального аттрактора в случае трехмерных потоков.	ОПК-2
Аттрактор Лоренца. Геометрическая модель <u>Афраймовича - Быкова - Шильникова</u> .	ОПК-2
Типы дискретных <u>гомоклинических</u> аттракторов трехмерных отображений. Дискретные аттракторы Лоренца и восьмерочные аттракторы, и феноменологические сценарии их возникновения.	ОПК-2
Обзор странных аттракторов трехмерных <u>неориентируемых</u> отображений Эно.	ОПК-2
Обзор компьютерных методов исследования странных аттракторов на примере трехмерных систем (потоков и/или отображений)	ОПК-2

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы на вопросы верны или допущены незначительные ошибки.
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:



1. Бифуркация Андронова-Хопфа для потоков и отображений : учебно-методическое пособие / Болотов М. И., Гонченко С. В., Гонченко А. С., Гринес Е. А., Казаков А. О., Леванова Т. А., Лукьянов В. И. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. - 73 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729744&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Арнольд Владимир Игоревич. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов. - М. : Наука, 1978. - 304 с. - 0.95., 29 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.mathnet.ru>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Малкин Михаил Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.