

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 10 от 27.08.2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Математическая логика

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование и искусственный интеллект

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.05 Математическая логика относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-3: Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	<p>ПК-3.1: Собирает, обрабатывает, анализирует и обобщает результаты экспериментов и исследований, проводит эксперименты и наблюдения, составляет отчеты по теме или по результатам проведенных экспериментов.</p> <p>ПК-3.2: Применяет полученные знания на практике для решения производственных задач.</p> <p>ПК-3.3: Выбирает и реализовывает на практике экспериментальные исследования параметров и характеристик программных и программно-аппаратных комплексов различного функционального назначения.</p>	<p>ПК-3.1:</p> <p>Знает основные понятия и утверждения логики первого порядка; синтаксис и правила построения формул логического языка первого порядка; теоремы о дедуктике; понятия префиксного и антипрефиксного видов формул логики первого порядка, а также понятие Г-формулы; понятие экспоненциально сходящейся последовательности и основные свойства последовательностей, связанные с экспоненциальной сходимостью; формулировку и основные принципы обоснования справедливости закона 0-1 в логике первого порядка (теоремы Глебского); основные типы математических теорий и связанные с ними понятия, методы и алгоритмы, в частности, метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости; основные модели вычислений, понятие полиномиальной сводимости задач, определения классов P и NP, примеры задач из этих классов.</p>	<p>Тест</p> <p>Задачи</p>	<p>Экзамен:</p> <p>Контрольные вопросы</p> <p>Задачи</p>

		<p><i>ПК-3.2:</i>  <i>Умеет строить и анализировать элементарные логические высказывания; задавать интерпретацию логических высказываний; выразить друг через друга отношения между элементами простейших алгебраических и геометрических структур; задавать модели простейших высказываний логики первого порядка, находить долю выполнимости; строить последовательности поисковых деревьев; приводить замкнутую формулу к префиксной, антипрефиксной формуле, а также Г-формуле; проводить реализацию основных этапов метода элиминации кванторов в теории плотного линейного порядка без конечных точек и в теории целых чисел с отношениями делимости, пользуясь алгоритмом Пресбургера; составлять простейшие программы на машине Тьюринга, приводить примеры невычислимых функций и алгоритмически неразрешимых отношений</i></p> <p><i>ПК-3.3:</i>  <i>Имеет практический опыт сбора и обработки данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям</i></p>		
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
--	--------------

<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>32</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>22</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
Тема 1. Элементы логического языка первого порядка	5	1	2	3	2
Тема 2. Модели формул логического языка первого порядка	7	1	2	3	4
Тема 3. Логический вывод	13	3	6	9	4
Тема 4. Канонические формы предложений в логике первого порядка	8	2	4	6	2
Тема 5. Приближенное выражение свойств структур в логике первого порядка	8	2	4	6	2
Тема 6. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий	5	1	2	3	2
Тема 7. Алгоритмическая разрешимость теорий. Метод элиминации кванторов	11	3	6	9	2
Тема 8. Изучение моделей вычислений на примере машины Тьюринга	8	2	4	6	2
Тема 9. Вычислимость и разрешимость. Измерение алгоритмической сложности задач	5	1	2	3	2
Аттестация	36				
КСР	2			2	
<b>Итого</b>	<b>108</b>	<b>16</b>	<b>32</b>	<b>50</b>	<b>22</b>

### Содержание разделов и тем дисциплины

Цели и задачи изучения дисциплины

Целями дисциплины «Математическая логика» являются:

- ознакомление студентов с понятиями и фактами, являющимися основой современной

математической логики и играющими важную роль в ее приложениях;

- приобретение навыков математического моделирования различных процессов и закономерностей реального мира;
- воспитание у студентов математической культуры;
- формирование математического мышления.

Задачи

- 1) Изучить теоретические основы дисциплины «Математическая логика».
- 2) Обеспечить формирование компетенции ПК-3 в соответствии с требованиями образовательной программы.
- 3) Сформировать умения строить и анализировать логические высказывания, задавать их интерпретацию и модели высказываний логики первого порядка, выполнять преобразование логических формул, применять методы элиминации кванторов, а также составлять простейшие программы для машины Тьюринга и приводить примеры невычислимых функций и алгоритмически неразрешимых отношений.

Содержание:

1. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех  $k$ -местных предикатов и функций на  $n$ -элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения. Примеры.
2. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие алгебраической системы (структуры) заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры. Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры: примеры и контрпримеры.
3. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления.
4. Понятие исключающих кванторов, модификация правил построения формул, связанная с введением исключающих кванторов. Выражение истинностных значений формул, содержащих исключающие кванторы. Понятие  $\Gamma$ -формулы. Логическая равносильность любой формулы языка первого порядка некоторой  $\Gamma$ -формуле, примеры.
5. Логический вывод. Формальные понятия доказательства и правила вывода, пример. Разветвляющие и неразветвляющие правила. Существование конечного числа правил вывода и математическое понятие доказательства, при помощи которых можно доказать утверждения вида  $\Gamma \Rightarrow A$ . Пример.
6. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Лемма о поисковых последовательностях (формулировка без доказательства). Понятие дерева доказательства. Понятие выводимости формулы  $A$  из множества гипотез  $\Gamma$ . Теорема о корректности дедуктики.
7. Логический вывод. Понятие ветви поискового дерева, насыщенной относительно заданного множества параметров. Понятие полного поискового дерева. Лемма о существовании полного дерева.
8. Логический вывод. Теоремы о полноте и об адекватности дедуктики. Теорема о компактности.

9. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Предваренные нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к префиксному виду, примеры.
10. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятия сингулярной и примарной формул. Алгоритм приведения любой сингулярной формулы к булевой комбинации примарных, пример.
11. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятие свободного вхождения атомарной части в формулу. Понятие атомарно замкнутой и антипрефиксной формул. Основные этапы алгоритма приведения атомарно замкнутой формулы к антипрефиксному виду, пример.
12. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Понятие доли выполнимости предложений. Ее обобщение для формул, содержащих свободные переменные. Свойства нормальной доли выполнимости.
13. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Основные свойства, связанные с экспоненциальной сходимостью.
14. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Взаимосвязь нормальной доли выполнимости и экспоненциальной сходимости. 14. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Взаимосвязь нормальной доли выполнимости и экспоненциальной сходимости.
15. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Доказательство закона 0-1 (теорема Глебского).
16. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий.
17. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость. Метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости некоторых теорий (общий алгоритм). Основной этап метода для доказательства алгоритмической разрешимости теории плотного линейного порядка без концевых точек, пример.
18. Основные этапы метода элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теории целых чисел (алгоритм Пресбургера).
19. Расширение и сужение элементарных теорий. Консервативные и неконсервативные расширения теорий, примеры. Явные определения новых функциональных и предикатных символов. Установление явной определимости нелогических символов через другие для исключения из теорий избыточных символов (метод Падоа), пример. Эквивалентные и слабо эквивалентные теории.
20. Модели вычислений, машина Тьюринга: представление и преобразование информации, тьюринговы программы. Алгебра тьюринговых программ (их запись при помощи аналитических выражений). Методика доказательства правильности тьюринговых программ. Пример.
21. Вычислимость и разрешимость: понятия словарных функций и словарных отношений, полуразрешимые и разрешимые отношения, вычислимые функции. Примеры.

22. Понятие частично-рекурсивных функций. Тезис Черча.

23. Понятия разрешимых отношений и вычислимых функций. Примеры невычислимой по Тьюрингу функции и алгоритмически неразрешимого отношения.

24. Измерение алгоритмической сложности задач: временная и пространственная сложность алгоритмов, расшифровка этих понятий на примере тьюринговых программ. Верхняя и нижняя оценки временной сложности.

25. Классы P и NP. Примеры задач из этих классов. Полиномиальная сводимость одной задачи к другой, NP-полные и NP-трудные задачи, пример.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. Москва, Изд. МЦНМО, 2012.  
[www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf](http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf)

2. Гордон Е.И. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. Рег. №10.98.06.  
[www.unn.ru/books/resources.html](http://www.unn.ru/books/resources.html)

3. Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Элементы неклассических логик и моделей вычислений: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 33 с.  
[www.unn.ru/books/met\\_files/NL.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/NL.pdf)

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ПК-3:**

1. Какие из нижеприведённых последовательностей символов являются подформулами формулы

$\neg x[P(x) \vee \exists y[\exists Q(y) \& R(x, f(y))]]$  ?

1.  $x$
2.  $P(x)$
3.  $f(y)$

4.  $Q(y) \& R(x, f(y))$
5.  $\forall x P(x)$
6.  $\exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]$
7.  $\forall x \exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]$

2. Какие из нижеприведённых формул являются предложениями?

1.  $P(x)$
2.  $\exists x P(x)$
3.  $\exists x R(x, y)$
4.  $\forall x \exists y R(x, y)$
5.  $\forall x [P(x) \vee Q(x)]$
6.  $\forall x [P(x) \vee Q(y)]$
7.  $\forall x [P(x) \vee \exists y Q(y)]$
8.  $\forall x [P(x) \vee \exists y R(x, y)]$
9.  $[\forall x P(x)] \vee [\exists y R(x, y)]$

3. Какие из нижеприведённых формул являются выполнимыми?

1.  $\exists x P(x)$
2.  $\exists x [P(x) \& \neg P(x)]$
3.  $[\forall x P(x)] \& [\forall x \neg P(x)]$
4.  $\exists x [P(x) \vee \neg P(x)]$
5.  $[\forall x P(x)] \vee [\forall x \neg P(x)]$
6.  $[\forall x P(x)] \& [\exists x \neg P(x)]$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Верно решено не менее 60% тестовых заданий
не зачтено	Решено неправильно или не решено более 40% тестовых заданий

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-3:

**Задача 1.** Найдите все термы, атомарные формулы и подформулы, содержащиеся в формуле логического языка первого порядка

$$\forall x \exists y \forall z [(P(x) \& \neg Q(y)) \vee [R(z) \& Q(x)]]$$

Определите число моделей этой формулы на  $n$ -элементном универсе и подсчитайте ее долю выполнимости, найдите ее предел при  $n \rightarrow \infty$ . Постройте какую-нибудь модель этой формулы на универсе из четырех элементов.

**Задача 2.** Приведите заданную формулу к антипрефиксному виду:

$$\forall x \exists y \forall z [(P(x) \& \neg Q(y)) \vee [R(z) \& Q(x)]]$$

Пользуясь теоремой Глебского, вычислите предел ее доли выполнимости.

**Задача 3.** Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово  $t$  над алфавитом  $A = \{ 1 \}$  в выходное слово  $[t/3]$  (здесь  $t$  – фиксированное, но заранее не известное натуральное число). Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы. Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности.

**Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Верно решено не менее 95% задач
отлично	Верно решено не менее 85%, но не более 95% задач
очень хорошо	Верно решено не менее 80%, но не более 85% задач
хорошо	Верно решено не менее 70%, но не более 80% задач
удовлетворительно	Верно решено не менее 55%, но не более 70% задач
неудовлетворительно	Верно решено не менее 35%, но не более 55% задач
плохо	Верно решено не более 35% задач

**5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации**

**Шкала оценивания сформированности компетенций**

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

					ошибок		
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех  $k$ -местных предикатов и функций на  $n$ -элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения. Примеры.

2. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие алгебраической системы (структуры) заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры. Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры: примеры и контрпримеры.

3. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления.

4. Понятие исключающих кванторов, модификация правил построения формул, связанная с введением исключающих кванторов. Выражение истинностных значений формул, содержащих исключающие кванторы. Понятие  $\Gamma$ -формулы. Логическая равносильность любой формулы языка первого порядка некоторой  $\Gamma$ -формуле, примеры.

5. Логический вывод. Формальные понятия доказательства и правила вывода, пример. Разветвляющие и неразветвляющие правила. Существование конечного числа правил вывода и математическое понятие доказательства, при помощи которых можно доказать утверждения вида  $\Gamma \Rightarrow A$ . Пример.

6. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Лемма о поисковых последовательностях (формулировка без доказательства). Понятие дерева доказательства. Понятие выводимости формулы  $A$  из множества гипотез  $\Gamma$ . Теорема о корректности дедуктики.

7. Логический вывод. Понятие ветви поискового дерева, насыщенной относительно заданного множества параметров. Понятие полного поискового дерева. Лемма о существовании полного дерева.

8. Логический вывод. Теоремы о полноте и об адекватности дедуктики. Теорема о компактности.

9. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Предваренные нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к префиксному виду, примеры.

10. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятия сингулярной и примарной формул. Алгоритм приведения любой сингулярной формулы к булевой комбинации примарных, пример.

11. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятие свободного вхождения атомарной части в формулу. Понятие атомарно замкнутой и антипрефиксной формул. Основные этапы алгоритма приведения атомарно замкнутой формулы к антипрефиксному виду, пример.

12. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Понятие доли выполнимости предложений. Ее обобщение для формул, содержащих свободные переменные. Свойства нормальной доли выполнимости.
13. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Основные свойства, связанные с экспоненциальной сходимостью.
14. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Взаимосвязь нормальной доли выполнимости и экспоненциальной сходимости.
14. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Взаимосвязь нормальной доли выполнимости и экспоненциальной сходимости.
15. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Доказательство закона 0-1 (теорема Глебского).
16. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий.
17. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость. Метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости некоторых теорий (общий алгоритм). Основной этап метода для доказательства алгоритмической разрешимости теории плотного линейного порядка без конечных точек, пример.
18. Основные этапы метода элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теории целых чисел (алгоритм Пресбургера).
19. Расширение и сужение элементарных теорий. Консервативные и неконсервативные расширения теорий, примеры. Явные определения новых функциональных и предикатных символов. Установление явной определимости нелогических символов через другие для исключения из теорий избыточных символов (метод Падоа), пример. Эквивалентные и слабо эквивалентные теории.
20. Модели вычислений, машина Тьюринга: представление и преобразование информации, тьюринговы программы. Алгебра тьюринговых программ (их запись при помощи аналитических выражений). Методика доказательства правильности тьюринговых программ. Пример.
21. Вычислимость и разрешимость: понятия словарных функций и словарных отношений, полурешимые и разрешимые отношения, вычисляемые функции. Примеры.
22. Понятие частично-рекурсивных функций. Тезис Черча.
23. Понятия разрешимых отношений и вычисляемых функций. Примеры невычислимой по Тьюрингу функции и алгоритмически неразрешимого отношения.
24. Измерение алгоритмической сложности задач: временная и пространственная сложность алгоритмов, расшифровка этих понятий на примере тьюринговых программ. Верхняя и нижняя оценки временной сложности.
25. Классы P и NP. Примеры задач из этих классов. Полиномиальная сводимость одной задачи к другой, NP-полные и NP-трудные задачи, пример.

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. В структуре  $S = (M; =, B, D)$ ,  $\tau = (2, 3, 4)$ , где  $M$  — множество точек плоскости, отношение  $B(a, b, c)$  истинно  $\iff$  точки  $a, b, c$  лежат на одной прямой, причем  $b$  расположена между точками  $a$  и  $c$ , отношение  $D(a, b, c, d)$  истинно  $\iff \rho(a, b) = \rho(c, d)$ , выразите отношение  $Q(a, b, c)$  — угол  $abc$  равен  $30^\circ$ .

2. Найдите все термы, атомарные формулы и подформулы, содержащиеся в формуле логического языка первого порядка

$$\forall x \exists y [(P(x, y) \& Q(x, y)) \rightarrow R(x, y)]$$

Определите число моделей этой формулы на  $n$ -элементном универсе и подсчитайте ее долю выполнимости, найдите ее предел при  $n \rightarrow \infty$ . Постройте какую-нибудь модель этой формулы на универсе из четырех элементов.

3. Приведите заданную формулу к антипрефиксному виду:

$$\forall x \exists y \forall z [(P(x) \& \neg Q(y)) \vee [R(z) \& Q(x)]]$$

Пользуясь теоремой Глебского, вычислите предел ее доли выполнимости.

4. Постройте поисковое дерево и установите, верно ли, что  $\Gamma \Rightarrow A$ :

$$\Gamma = \{ "x [ [ \$y R(x, y) ] \rightarrow \neg P(x) ], \$x "y R(x, y) \},$$

$$A = \$x [ P(x) \& \$y R(x, y) ]$$

5. Выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории плотного линейного порядка без концевых точек:

$$A = \$z "y \$x [ [ \neg R(z, y) \vee R(y, x) ] \& [ \neg R(z, x) \vee R(x, y) ] ]$$

6. Выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории действительных чисел

$$T = (R; =, <, +, -, 0, 1):$$

$$A = "x \$y \$z [ (5x + y < 2z) \& (5z < 3x + 2y) \& (3z < 4x + 3y) ]$$

7. Применяя алгоритм Пресбургера, выясните, является ли предложение  $A$  теоремой теории целых чисел с отношениями делимости:

$$T = (Z; <, D2, D3, \dots; +, -, 0, 1):$$

$$A = \$y \$x [ (15y + 11 < 5x) \& (4x < 12y + 13) \& D4(3x - 1) \& D6(5x - 1) \& D9(7x - 2) ]$$

8. Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово  $m$  над алфавитом  $A = \{ 1 \}$  в выходное слово  $[m/3]$  (здесь  $m$  – фиксированное, но заранее не известное натуральное число).

Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы.

Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

Оценка	Критерии оценивания
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Верещагин Н. К. Языки и исчисления. Ч. 2. Языки и исчисления / Верещагин Н. К., Шень А. - 3-е изд., доп. - Москва : МЦНМО, 2008. - 288 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-94057-322-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=711591&idb=0>.
2. Клини Стефан Коул. Математическая логика / пер. с англ. Ю. А. Гастева ; под ред. Г. Е. Минца. - М. : Мир, 1973. - 480 с. - В кн. также: Нормализация доказательств ; Функциональная форма ; Теорема Эрбрана для непредваренных формул / Г. Е. Минц. - 2.50., 3 экз.
3. Верещагин Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления. - М. : МЦНМО, 2000. - 288 с. - (Современные лекционные курсы). - ISBN 5-900916-66-9 : 29.00., 1 экз.
4. Верещагин Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. - М. : МЦНМО, 1999. - 176 с. - (Современные лекционные курсы). - ISBN 5-900916-39-1 : 17.00., 1 экз.
5. Новиков Петр Сергеевич. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. - М. : Наука, 1977. - 328 с. : ил. - (Математическая логика и основания математики). - 1.43., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Мендельсон Эллиот. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф. А. Кабакова ; под ред. С. И. Адяна. - 3-е изд. - М. : Наука, 1984. - 319 с. : ил. - 1.80., 25 экз.
2. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук / пер. с англ. О. Н. Дынник ; ред. и предисл. к рус. пер. С. А. Яновской ; примеч. Г. М. Адельсона-Вельского. - М. : Гиз иностр. лит., 1948. - 326 с. - 1566.00., 2 экз.
3. Черч А. Введение в математическую логику. Т. 1 / пер. с англ. В. С. Чернявского ; под ред. [и с предисл.] В. А. Успенского. - М. : Изд-во иностр. лит., 1960. - 485 с. - 0.50., 2 экз.
4. Шенфилд Джозев Р. Математическая логика / пер. с англ. И. А. Лаврова и И. А. Мальцева; под ред. Ю. Л. Ершова. - М. : Наука, 1975. - 527 с. - (Математическая логика и основания математики). - 2.16., 3 экз.
5. Гейтинг А. Интуиционизм : введение / пер. с англ. В. А. Янкова; под ред. и с коммент. А. А. Маркова. - М. : Мир, 1965. - 200 с. - 0.66., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. Москва, Изд. МЦНМО, 2012 - <https://old.mccme.ru/free-books//shen/shen-logic-part2-2.pdf>
2. Гордон Е.И. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. Рег. №10.98.06 - <http://www.unn.ru/books/resources.html>
3. Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Элементы неклассических логик и моделей вычислений: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 33 с. - [www.unn.ru/books/met\\_files/NL.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/NL.pdf)

Используемое лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

1. Microsoft Visual Studio - <https://visualstudio.microsoft.com/ru/>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Сорочан Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 25.06.2025, протокол № Протокол №11.