

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Эллиптические дифференциальные уравнения

---

Уровень высшего образования  
Магистратура

---

Направление подготовки / специальность  
01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.01.01 Эллиптические дифференциальные уравнения относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-5: Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	<p>ПК-5.1: Знает специфику научных обзоров</p> <p>ПК-5.2: Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию</p> <p>ПК-5.3: Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований</p>	<p>ПК-5.1: Знает методы нахождения, формулировки и решения актуальных и значимых проблем фундаментальной и прикладной математики, методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач</p> <p>ПК-5.2: Умеет выделять значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики, методы обработки информации, полученной в результате эксперимента</p> <p>ПК-5.3: Владеет опытом применения методов нахождения, формулировки и решения актуальных и значимых проблем фундаментальной и прикладной математики, методов обработки информации, полученной в результате эксперимента</p>	Задания	Зачёт: Контрольные вопросы
ПК-6: Обладает навыками преподавания математики и информатики в	ПК-6.1: Знает уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного	ПК-6.1: Знает уровень подготовки при решении теоретических и прикладных задач	Задания	Зачёт: Контрольные вопросы

средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования	процесса ПК-6.2: Умеет учитывать уровень подготовки и психологию обучающихся ПК-6.3: Владеет навыками преподавания математики и информатики в средней школе, средних специальных и высших учебных заведениях	ПК-6.2: Умеет учитывать уровень подготовки для обработки информации, полученной в результате эксперимента  ПК-6.3: Владеет навыками применения методов нахождения, формулировки и решения актуальных и значимых проблем фундаментальной и прикладной математики, методов обработки информации, полученной в результате эксперимента		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	

	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Элементы теории гильбертовых пространств. Теорема Лакса-Мильграма. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве, теорема Гильберта-Шмидта	11	2	2	4	7
Тема 2. Основные функциональные пространства и их свойства. Пространства С.Л.Соболева: определение, свойства, теорема о полноте	12	2	2	4	8
Тема 3. Основные краевые задачи для эллиптических уравнений дивергентного вида	12	2	2	4	8
Тема 4. Обобщенные решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задачи	12	2	2	4	8
Тема 5. Обобщенные решения задачи Неймана для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задачи	12	2	2	4	8
Тема 6. Обобщенные решения задачи Ньютона для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задачи	12	2	2	4	8
Тема 7. Задачи на собственные значения и собственные функции для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задач	12	2	2	4	8
Тема 8. Методы Рунге и Галеркина нахождения приближенных решений эллиптических уравнений дивергентного вида	12	1	1	2	10
Тема 9. Фундаментальное решение уравнения Лапласа и методы теории потенциала	12	1	1	2	10
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	16	16	33	75

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Элементы теории гильбертовых пространств. Теорема Лакса-Мильграма. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве, теорема Гильберта-Шмидта
2. Основные функциональные пространства и их свойства. Пространства С.Л.Соболева: определение, свойства, теорема о полноте
3. Основные краевые задачи для эллиптических уравнений дивергентного вида
4. Обобщенные решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задачи
5. Обобщенные решения задачи Неймана для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задачи
6. Обобщенные решения задачи Ньютона для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задачи
7. Задачи на собственные значения и собственные функции для эллиптических уравнений дивергентного вида. Вариационная формулировка задач
8. Методы Рунге и Галеркина нахождения приближенных решений эллиптических уравнений дивергентного вида
9. Фундаментальное решение уравнения Лапласа и методы теории потенциала

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:  
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Эллиптические дифференциальные уравнения (МАТЕМАТИКА 1 маг),  
<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6840>.

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5:**

Сформулировать и обосновать обобщенную постановку задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Сформулировать и обосновать обобщенную постановку задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Сформулировать и обосновать основные свойства собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнения Пуассона.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа и функция Грина основных краевых задач.

#### **5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-6:**

Пространства гладких и измеримых функций. Полнота функциональных пространств.

Понятие обобщенного дифференцирования. Пространства С.Л.Соболева и гильбертовы пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций.

Основные понятия теории потенциала. Сведение краевых задач к интегральному уравнению.

Обобщенные формулировки и вариационные принципы для двухточечных краевых задач.

Обобщенные формулировки и вариационные методы решения краевых задач для уравнения Пуассона.

Применение метода Ритца для решения задач математической физики в вариационной форме.

Метод Ритца и метод конечных элементов. Получение разрешающих соотношений.

Функции Грина для основных краевых задач.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или содержат незначительные ошибки
не зачтено	Ответа нет или ответ содержит грубые ошибки

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие	При решении	Имеется	Продемонс	Продемонс	Продемонс	Продемонстр

	базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми и недочетами	трированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми и недочетами	трированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	трированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	ирован творческий подход к решению нестандартных задач
--	---	---	---	--	---	---	--

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5**

Пространства гладких и измеримых функций. Полнота функциональных пространств.

Обобщенные формулировки и вариационные принципы для двухточечных краевых задач.

Обобщенные формулировки и вариационные методы решения краевых задач для уравнения Пуассона.

Функции Грина для основных краевых задач.

**5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6**

Понятие обобщенного дифференцирования. Пространства С.Л.Соболева и гильбертовы пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций.

Применение метода Ритца для решения задач математической физики в вариационной форме.

Метод Ритца и метод конечных элементов. Получение разрешающих соотношений.

Основные понятия теории потенциала. Сведение краевых задач к интегральному уравнению.

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или содержат незначительные ошибки
не зачтено	Ответа нет или ответ содержит грубые ошибки

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Владимиров Василий Сергеевич. Уравнения математической физики : учеб. для физ. и мех.-мат. вузов. - 4-е изд., испр. и доп. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. - 512 с. - 50.00., 13 экз.
2. Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными / Арнольд В. И. - Москва : МЦНМО, 2018. - 181 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-3174-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828695&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Ландис Евгений Михайлович. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. - М. : Наука, 1971. - 287 с. - 1.10., 2 экз.
2. Олейник Ольга Арсеньевна. Лекции об уравнениях с частными производными. Ч. 1 / МГУ им. М. В. Ломоносова, Мех.-мат. фак., Каф. дифференц. уравнений. - М. : Изд-во МГУ, 1976. - 110 с. - бц., 1 экз.
3. Михлин Соломон Григорьевич. Курс математической физики. - 2-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2002. - 576 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0468-9 : 90.75., 12 экз.
4. Тихонов Андрей Николаевич. Уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов. - 3-е изд., испр. и доп. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. - 724 с. - 22.00., 179 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Landis1971ru.djvu>  
Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. . Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Mihlin1968ru.djvu>

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6840>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.