

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

**Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Working programme of the discipline

Applied Probability Theory

Higher education level

Bachelor degree

Area of study / speciality

02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology

Focus /specialization of the study programme

General Profile

Mode of study

full-time

Nizhny Novgorod

Year of commencement of studies 2025

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.14 Прикладная теория вероятностей относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знать следующие понятия прикладной теории вероятностей и статистики: 1) одномерные и многомерные непрерывные распределения случайных величин и векторов 2) числовые характеристики непрерывных случайных величин и векторов 3) статистическая независимость компонент непрерывного случайного вектора 4) выборка и выборочное распределение 5) выборочные числовые характеристики 6) статистическая гипотеза УК-1.2: Уметь решать типовые задачи прикладной теории вероятностей и статистики: 1) нахождение одномерных и многомерных непрерывных распределений случайных векторов 2) вычисление числовых характеристик непрерывных величин и векторов 3) нахождение распределения суммы непрерывных случайных величин 4) оценивание параметров распределений по повторной	Контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи

		выборке 5) проверка гипотезы о согласии выборки с заданным распределением 6) проверка независимости признаков по таблице сопряженности 7) построение линейной регрессионной зависимости УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками по тематике прикладной теории вероятностей и прикладной статистике		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	24
- КСР	2
самостоятельная работа	22
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические	Всего	

			занятия/лабораторные работы), часы		
	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О
Непрерывные распределения вероятностей / Continuous probability distributions	22	8	8	16	6
Метод характеристических функций и центральная предельная теорема / Method of characteristic functions and the central limit theorem	9	3	3	6	3
Выборочный метод / Sample method	18	6	6	12	6
Статистические гипотезы / Statistical hypotheses	21	7	7	14	7
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	24	24	50	22

Contents of sections and topics of the discipline

1) Непрерывные распределения вероятностей (одномерные и многомерные). Частные распределения, независимость, распределение функций от случайных векторов. Числовые характеристики непрерывных распределений

Continuous probability distributions (univariate and multivariate). Marginal probability distributions, independence, functions of several continuous random variables. Numerical characteristics of continuous distributions

2) Метод характеристических функций и центральная предельная теорема. Законы больших чисел
Method of characteristic functions and central limit theorems. Laws of large numbers

3) Случайная выборка. Выборочные распределения и выборочные характеристики. Подгонка распределения и оценка параметров. Свойства оценок.
Random samples. Sample distribution and sample characteristics. Distribution fitting. Properties of estimators.

4) Статистические гипотезы. Критерии согласия. Таблицы сопряженности признаков. простая линейная регрессия. Элементы дисперсионного анализа
Statistical hypotheses. Goodness-of-fit tests. Contingency tables. Simple linear regression. Elements of analysis of variance.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа заключается в чтении основной литературы для ознакомления с теоретическими положениями и подготовке к промежуточной аттестации.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Assessment tools for ongoing monitoring of learning progress and interim certification in the discipline (module)

5.1 Model assignments required for assessment of learning outcomes during the ongoing monitoring of learning progress with the criteria for their assessment:

5.1.1 Model assignments (assessment tool - Control work) to assess the development of the competency УК-1:

Вариант 1

Задача 1

Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение $N(2,9)$, $N(1,4)$ соответственно. Вычислить вероятность $P(\xi - 2\eta > 5)$.

Random variables ξ and η are independent and are normally distributed as $N(2,9)$ and $N(1,4)$ correspondingly. Compute the probability $P(\xi - 2\eta > 5)$.

Задача 2

Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид

The joint probability density of random variables ξ and η is

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{если } 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $\vartheta = \max\{\xi, \eta\}$.

Find the probability distribution function of a random variable $\vartheta = \max\{\xi, \eta\}$.

Задача 3

Из круга радиуса R с центром в начале координат вырезан круг радиуса r (центры кругов совпадают). В полученную область наудачу брошена точка. Пусть (ξ, η) – ее координаты. Зависимы или нет случайные величины ξ и η ?

From a disk of radius R centered at the Origin a disk of radius r is cut (the disk centers coincide). Into the domain thus obtained a random point is thrown. Let (ξ, η) be its Cartesian coordinated. Are the random variables ξ and η dependent or not?

Задача 4

Найти законы распределения

Find the probability distributions

a) $\xi + \eta$;

б) ξ/η

with independent random variables ξ, η when ξ, η have the uniform distributions in the line segments $[0,1]$, $[0,2]$ correspondingly.

Assessment criteria (assessment tool — Control work)

Grade	Assessment criteria
outstanding	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
excellent	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
very good	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
good	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
satisfactory	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
unsatisfactory	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
poor	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Description of scales for assessing learning outcomes in the discipline during interim certification

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Scale of assessment for interim certification

Grade		Assessment criteria
pass	outstanding	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "outstanding", the knowledge and skills for the relevant competencies have been demonstrated at a level higher than the one set out in the programme.
	excellent	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "excellent",
	very good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "very good",
	good	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "good",
	satisfactory	All the competencies (parts of competencies) to be developed within the discipline have been developed at a level no lower than "satisfactory", with at least one competency developed at the "satisfactory" level.
fail	unsatisfactory	At least one competency has been developed at the "unsatisfactory" level.
	poor	At least one competency has been developed at the "poor" level.

5.3 Model control assignments or other materials required to assess learning outcomes during the interim certification with the criteria for their assessment:

5.3.1 Model assignments (assessment tool - Control questions) to assess the development of the competency УК-1

1. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
Random variables. Discrete and continuous random variables. Examples.
2. Совместное распределение нескольких дискретных величин. Примеры.
Joint probability distribution of several random variables: discrete case. Examples.
3. Совместное распределение нескольких непрерывных величин. Примеры.
Joint probability distribution of several random variables: continuous case. Examples.
4. Распределение вероятностей функции от случайной величины ($Y=f(X)$). Примеры.
Probability distribution of a function of a random variable ($Y=f(X)$). Examples.
5. Распределение вероятностей суммы двух целочисленных случайных величин. Примеры.
Probability distribution of a sum of two integer random variables. Examples.
6. Распределение вероятностей суммы двух непрерывных случайных величин. Примеры.
Probability distribution of a sum of two continuous random variables. Examples.
7. Математическое ожидание. Его свойства (с доказательствами). Примеры.
Mathematical expectation. Its properties (with proofs). Examples.
8. Дисперсия и ее свойства (с доказательством). Примеры.
Variance and its properties (with proofs). Examples.
9. Ковариация и корреляция, их свойства. Примеры.
Covariance and correlation, their properties. Examples.
10. Биномиальное распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия.
Binomial distribution: its origins, mathematical expectation, variance.
11. Дискретное равномерное распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательствами).
Discrete uniform distribution: its origins, mathematical expectation, variance (with proofs).
12. Распределение Пуассона: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательством).
Poisson distribution: its origins, mathematical expectation, variance (with proofs).
13. Гипергеометрическое распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательством).
Hyper-geometric distribution: its origins, mathematical expectation, variance (with proofs).
14. Геометрическое распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательством).
Geometric distribution: its origins, mathematical expectation, variance (with proofs).
15. Равномерное непрерывное распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательством).
Continuous uniform distribution, its mathematical expectation, variance (with proofs).

16. Экспоненциальное распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательствами)
Exponential distribution, its mathematical expectation, variance (with proofs).
17. Нормальное (гауссовское) распределение: происхождение, математическое ожидание, дисперсия (с доказательствами)
Normal (Gaussian) distribution, its mathematical expectation, variance (with proofs).
18. Теорема Муавра–Лапласа. Центральная предельная теорема. Примеры
DeMoivre – Laplace theorem. Central limit theorem. Examples.
19. Закон больших чисел. Примеры.
Laws of large numbers. Examples.
20. Случайная выборка, выборочное среднее, выборочная дисперсия, частотное распределение, гистограмма
Random sample, sample mean, sample variance, frequency distribution, histograms.
21. Оценка параметров по методу аналогий (методу моментов) с примерами
Method of analogy (method of moments) of parameters' estimation. Examples
22. Оценка параметров по методу максимального правдоподобия. Примеры: распределение Пуассона, нормальное распределение (с доказательствами)
Maximum likelihood estimators. Examples: Poisson distribution, Normal (Gaussian) distribution (with proofs).
23. Дисперсионный анализ
Analysis of variance.
24. Простая линейная регрессия
Simple linear regression.
25. Критерий согласия хи-квадрат
Chi-square goodness-of fit test.
26. Независимость признаков в таблице сопряженности по методу хи-квадрат
Chi-square test of independence for a contingency table.

Assessment criteria (assessment tool — Control questions)

Grade	Assessment criteria
outstanding	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
excellent	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
very good	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
good	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена

Grade	Assessment criteria
	дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
satisfactory	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
unsatisfactory	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
poor	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3.2 Model assignments (assessment tool - Tasks) to assess the development of the competency УК-1

Задача 1.

Пусть двумерный случайный вектор (ξ, η) задан таблицей распределения

Let a two-dimensional random vector (ξ, η) be defined by the following joint probability distribution

$\eta \backslash \xi$	-1	1
-1	0	1/6
0	1/6	1/6
1	1/6	2/6

Найти двумерную функцию распределения $F(x,y)$ для случайного вектора (ξ, η) , все условные распределения случайной величины ξ .

Find the two-dimensional joint probability distribution function $F(x,y)$ for the random vector (ξ, η) , and all conditional probability distribution for the random variable ξ .

Задача 2.

Пусть двумерный случайный вектор (ξ, η) задан таблицей распределения

Let a two-dimensional random vector (ξ, η) be defined by the following joint probability distribution

$\eta \backslash \xi$	0	2
-1	1/4	0
0	1/2	1/8

1	1/8	0
---	-----	---

Найти двумерную функцию распределения $F(x,y)$ для случайного вектора (ξ,η) , частные распределения для случайных величин ξ и η , $\text{cov}(\xi, \eta)$.

Find the two-dimensional joint probability distribution function $F(x,y)$ for the random vector (ξ,η) , and all marginal probability distribution for the random variables ξ and η , compute $\text{cov}(\xi, \eta)$.

Assessment criteria (assessment tool — Tasks)

Grade	Assessment criteria
outstanding	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
excellent	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
very good	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
good	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
satisfactory	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
unsatisfactory	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
poor	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Zorin A.V. Eight Lectures in Probability Theory and Mathematical Statistics = Восемь лекций по теории вероятностей и математической статистике : coursebook / A. V. Zorin ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2014. - 108 p. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=850560&idb=0>.
2. Werner Linde. Probability Theory : A First Course in Probability Theory and Statistics. - De Gruyter, 2017. - 1 online resource. - ISBN 9783110466195. - ISBN 9783110466171. - Текст : электронный.,

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=856036&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Федоткин Михаил Андреевич. Основы прикладной теории вероятностей и статистики : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика". - М. : Высшая школа, 2006. - 368 с. : ил. - ISBN 5-06-005328-8 : 215.60., 183 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/probability.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.03.02 - Fundamental Informatics and Information Technology.

Авторы: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.