

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория графов

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

01.04.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Компьютерные науки и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.02.01 Теория графов относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-11: Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач производственно-технологической деятельности	<p>ПК-11.1: Знает методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых производственно-технологических задач</p> <p>ПК-11.2: Умеет применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых производственно-технологических задач</p> <p>ПК-11.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых производственно-технологических задач</p>	<p>ПК-11.1: Знать основные понятия теории графов: изоморфизм, пути и циклы, связность, шарниры, перешейки и блоки, метрические характеристики, каркасы, пространства циклов и разрезов; способы представления графов; важнейшие классы графов: деревья и леса, двудольные графы, планарные графы</p> <p>ПК-11.2: Уметь выполнять преобразования между различными формами представления графов, строить графовые модели реальных отношений</p> <p>ПК-11.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых производственно-технологических задач</p>	Тест	Зачёт: Задачи
ПК-4: Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных	ПК-4.1: Знает методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач	<p>ПК-4.1: Знать основные факты из теории графов; алгоритмы решения задач на графах</p> <p>ПК-4.2:</p>	Тест	Зачёт: Задачи

проблем и задач	<p>ПК-4.2: Умеет применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p> <p>ПК-4.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p>	<p>Уметь находить наиболее рациональные представления графов для решения различных задач и реализации алгоритмов, применять теоретические знания для исследования свойств графов</p> <p>ПК-4.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p>		
-----------------	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>75</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b>
	<b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Начальные понятия. Понятие графа. Типы графов. Способы задания. Изоморфизм, инварианты. Подграфы. Проблема	8	1	1	2	6

восстановления. Операции над графами. Графы пересечений. Пути и циклы. Связность, компоненты, шарниры, перешейки. Расстояния и метрические характеристики					
Тема 2. Перечисление графов. Число помеченных графов. Автоморфизмы. Число способов пометить граф. Число непомеченных графов (без доказательства). Асимптотическое перечисление. «Почти все» графы. Примеры: графы диаметра 2, связные графы	8	1	1	2	6
Тема 3. Методы обхода графов. Общая схема обхода. Поиск в ширину. BFS-дерево. Вычисление расстояний. Поиск в глубину. DFS-дерево. Выявление перешейков, шарниров, блоков	12	2	2	4	8
Тема 4. Важнейшие классы графов. Деревья, их свойства. Корневые деревья. Алгоритм распознавания изоморфизма деревьев. Каркасы. Двудольные графы, теорема Кенига. Планарные графы, формула Эйлера, критерии планарности. Алгоритм распознавания планарности	17	3	3	6	11
Тема 5. Эйлеровы циклы. Критерий существования. Алгоритм построения. Гамильтоновы циклы. Алгоритмы поиска гамильтоновых циклов. Квазициклы. Пространство циклов. Фундаментальные циклы. Алгоритмы построения базиса циклов. Пространство разрезов. Связь между пространствами циклов и разрезов	13	2	2	4	9
Тема 6. Независимые множества, клики, вершинные покрытия. Связи между тремя задачами. Дерево решений для задачи о независимом множестве. Эвристические алгоритмы, примеры. Точный и приближенный алгоритмы для задачи о вершинном покрытии	13	2	2	4	9
Тема 7. Паросочетания. Задачи о паросочетании и о реберном покрытии. Метод увеличивающих путей. Алгоритм для двудольных графов. Независимые множества в двудольных графах	8	1	1	2	6
Тема 8. Раскраски. Раскраска вершин. Оценки хроматического числа. Дерево решений. Последовательная раскраска. Проблема 4-х красок. Раскраска ребер, теорема Визинга	12	2	2	4	8
Тема 9. Потоки. Задача о максимальном потоке. Метод Форда-Фалкерсона. Алгоритм Эдмондса-Карпа	8	1	1	2	6
Тема 10. Оптимальные пути и каркасы. Алгоритмы Прима, Краскала и Дейкстры	8	1	1	2	6
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	16	16	33	75

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Смежность, инцидентность, степени. Способы задания графов. Графы пересечений
2. Подграфы, остовные, порожденные. Проблема восстановления
3. Пути и циклы. Связность, компоненты, шарниры, перешейки, блоки
4. Расстояния и метрические характеристики
5. Изоморфизм графов. Инварианты. Автоморфизмы. Помеченные и непомеченные графы. Число помеченных графов. Число способов пометить граф
6. Понятие дерева. Число деревьев. Центр дерева. Каркас графа
7. Распознавание изоморфизма деревьев

8. Двудольные графы. Теорема Кёнига
9. Планарные графы. Формула Эйлера. Критерии планарности. Алгоритм проверки планарности
10. Метод поиска в ширину. BFS-дерево. Вычисление расстояний в графе
11. Метод поиска в глубину. DFS-дерево. Выявление шарниров и перешейков
12. Эйлеровы циклы и пути. Алгоритм построения эйлеровых циклов
13. Гамильтоновы циклы и пути. Алгоритмы поиска гамильтоновых циклов
14. Пространство циклов графа. Квазициклы. Фундаментальные циклы. Цикломатическое число. Построение базы циклов
15. Пространство разрезов. Введение координат в пространствах циклов и разрезов, взаимная ортогональность этих пространств
16. Независимые множества и клики в графах. Алгоритм для задачи о независимом множестве на основе дерева решений. Эвристические алгоритмы
17. Вершинные покрытия в графах. Алгоритм для задачи о вершинном покрытии. Приближенный алгоритм
18. Паросочетания и реберные покрытия. Увеличивающие пути. Нахождение наибольшего паросочетания в двудольном графе
19. Независимые множества в двудольных графах. Теорема Кенига-Эгервари
20. Раскраски вершин графов. Алгоритм для задачи о раскраске на основе дерева решений. Последовательная раскраска. Раскраска ребер. Теорема Визинга (формулировка)
21. Задача о максимальном потоке. Увеличивающие пути. Метод Форда-Фалкерсона. Алгоритм Эдмондса-Карпа
22. Задача об оптимальном каркасе. Алгоритмы Прима и Крускала
23. Задачи об оптимальных путях. Алгоритм Дейкстры

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Алексеев Владимир Евгеньевич. Теория графов : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 "Фундам. информатика и информ. технологии". - Н. Новгород : ННГУ, 2018. - 119 с. - 79.85.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=497322&idb=0>

2. Алексеев Владимир Евгеньевич. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений : учеб. для студентов, обучающихся по специальности 010200 - Приклад. математика и информатика и по направлению 510200 - Приклад. математика и информатика . - М. : Интернет-Университет Информационных Технологий : Бином. Лаборатория знаний, 2014. - 320 с. : ил., табл. - (Основы информационных технологий). - ISBN 978-5-94774-543-6 (Бином.ЛЗ) : 160.00.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=465364&idb=0>

3. Sorochan Sergei Vladimirovich. Fundamentals of Graph Theory = Основы теории графов : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 59 p. - Текст : электронный.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853269&idb=0>

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ПК-11:**

1. В обыкновенном графе с 5 вершинами может быть:

- а) 15 ребер;
- б) 11 ребер;
- в) 9 ребер;
- г) 0 ребер.

2. В матрице смежности полного графа с 5 вершинами имеется:

- а) 30 единиц;
- б) 20 единиц;
- в) 10 единиц.

3. Инцидентность – это отношение между:

- а) двумя вершинами;
- б) двумя ребрами;
- в) вершиной и ребром;
- г) ребром и вершиной.

### **5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ПК-4:**

1. Алгоритм поиска в ширину применяется к графу с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами, заданному матрицей смежности. Какие из следующих оценок трудоемкости справедливы в этом случае?

- а)  $O(n)$ ;

- б)  $O(m)$ ;  
 в)  $O(m + n)$ ;  
 г)  $O(n^2)$ .

2. Алгоритм поиска в глубину применяется к графу с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами, заданному списками смежности. Какие из следующих оценок трудоемкости справедливы в этом случае?

- а)  $O(n)$ ;  
 б)  $O(m)$ ;  
 в)  $O(m + n)$ ;  
 г)  $O(n^2)$ .

3. Алгоритм поиска в глубину применяется к планарному графу с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами, заданному матрицей смежности. Какие из следующих оценок трудоемкости справедливы в этом случае?

- а)  $O(n)$ ;  
 б)  $O(m)$ ;  
 в)  $O(m + n)$ ;  
 г)  $O(n^2)$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Верно решено не менее 60% тестовых заданий
не зачтено	Решено неправильно или не решено более 40% тестовых заданий

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»



### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-11

1. Сколько существует абстрактных деревьев с 7 вершинами, радиусом 2 и одной центральной вершиной?
2. Сколько существует абстрактных деревьев с 7 вершинами, имеющих две центральные вершины?
3. Сколько существует абстрактных непланарных графов с 6 вершинами, имеющих 5 вершин степени 4?
4. Сколько существует абстрактных непланарных графов с 6 вершинами, из которых не менее двух имеют степень 5?
5. Сколько существует абстрактных графов с 9 вершинами, цикломатическим числом 2, имеющих гамильтонов цикл?
6. Сколько существует абстрактных графов с 7 вершинами, диаметром 5 и цикломатическим числом 2?

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-4

Задание 1. Какие из следующих утверждений верны?

1. При удалении любого ребра диаметр графа не увеличивается
2. При удалении любого ребра радиус графа не уменьшается
3. При удалении любой вершины диаметр графа не увеличивается
4. При удалении любой вершины радиус графа не уменьшается
5. При добавлении нового ребра радиус графа может уменьшиться

Задание 2. Какие из следующих утверждений верны?

1. Любая вершина, инцидентная двум перешейкам, является шарниром
2. Если в связном графе через каждую вершину проходит цикл, то в нем нет перешейков
3. Всякий шарнир принадлежит не менее чем двум блокам
4. Всякий блок содержит не менее 3 вершин
5. Если в графе нет перешейков, то в нем есть гамильтонов цикл

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Верно решено не менее 60% тестовых заданий
не зачтено	Решено неправильно или не решено более 40% тестовых заданий

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

## Основная литература:

1. Алексеев Владимир Евгеньевич. Теория графов : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 "Фундам. информатика и информ. технологии". - Н. Новгород : ННГУ, 2018. - 119 с. - 79.85., 20 экз.
2. Иорданский Михаил Анатольевич. Конструктивная теория графов и ее приложения. - Н. Новгород : Кириллица, 2016. - 172 с. - ISBN 978-5-905603-48-8 : 170.00., 2 экз.
3. Алексеев Владимир Евгеньевич. Графы. Модели вычислений. Структуры данных : учеб. для студентов, обучающихся по специальности 010200- Приклад. математика и 510200-Приклад. математика и информатика / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2005. - 307 с. : ил. - ISBN 5-85747-810-8 : 100.00., 2 экз.
4. Алексеев Владимир Евгеньевич. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений : учеб. для студентов, обучающихся по специальности 010200 - Приклад. математика и информатика и по направлению 510200 - Приклад. математика и информатика. - М. : Интернет-Университет Информационных Технологий : Бином. Лаборатория знаний, 2014. - 320 с. : ил., табл. - (Основы информационных технологий). - ISBN 978-5-94774-543-6 (Бином.ЛЗ) : 160.00., 1 экз.
5. Алексеев Владимир Евгеньевич. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений : учеб. для студентов, обучающихся по специальности 010200 - Прикладная математика и информатика и по направлению 510200 - Прикладная математика и информатика. - М. : Интернет-Университет Информационных Технологий : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. - 320 с. : ил., табл. - (Основы информационных технологий). - ISBN 5-94774-543-7 (БИНОМ.ЛЗ) : 224.00., 3 экз.

## Дополнительная литература:

1. Берж Клод. Теория графов и ее применения / пер. с фр. и послесл. А. А. Зыкова ; под ред. И. А. Вайнштейна. - М. : Изд-во иностр. лит., 1962. - 319 с. - 1.46., 3 экз.
2. Зыков Александр Александрович. Теория конечных графов. [Т. 1] / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. - Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1969. - 543 с. - 2.37., 3 экз.
3. Зыков Александр Александрович. Основы теории графов. - М. : Наука, 1987. - 381 с. - 2.10., 2 экз.
4. Оре, Ойстин. Теория графов / пер. с англ. И. Н. Врублевской ; под ред. Н. Н. Воробьева. - Изд. 2-е, стер. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. - 336 с. - 16.50., 4 экз.
5. Харари Фрэнк. Теория графов / пер. с англ. В. П. Козырева ; под ред. Г. П. Гаврилова. - М. : Мир, 1973. - 300 с. : ил. - 1.56., 2 экз.
6. Sorochan Sergei Vladimirovich. Fundamentals of Graph Theory = Основы теории графов : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 59 p. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853269&idb=0>.

## Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Алексеев Владимир Евгеньевич. Теория графов : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 "Фундам. информатика и информ. технологии". - Н. Новгород : ННГУ, 2018. - 119 с. - 79.85.  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=497322&idb=0>

2. Алексеев Владимир Евгеньевич. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений : учеб. для студентов, обучающихся по специальности 010200 - Приклад. математика и информатика и по направлению 510200 - Приклад. математика и информатика . - М. : Интернет-Университет Информационных Технологий : Бином. Лаборатория знаний, 2014. - 320 с. : ил., табл. - (Основы информационных технологий). - ISBN 978-5-94774-543-6 (Бином.ЛЗ) : 160.00.  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=465364&idb=0>

3. Sorochan Sergei Vladimirovich. Fundamentals of Graph Theory = Основы теории графов : teaching aid / S. V. Sorochan ; Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics. - Nizhny Novgorod : UNN Publishing House, 2023. - 59 p. - Текст : электронный.  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=853269&idb=0>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Сорочан Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.