

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет  
Кафедра теоретической физики

Утверждено  
решением ученого совета ННГУ  
(протокол от 14.12.2021 г. №4)

**Рабочая программа дисциплины**

**Векторный и тензорный анализ**

---

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Направление подготовки: 28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника  
Направленность (профиль): "Материалы микро- и наносистемной техники"

Форма обучения: очная

Нижний Новгород, 2022

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» относится к базовой части Б1.Б блока Б1 «Дисциплины (модули)», является обязательной для освоения, преподается на втором году обучения, в третьем семестре. Освоению дисциплины предшествует освоение дисциплин (модулей) «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Объем дисциплины «Векторный и тензорный анализ» составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 49 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (1 час – мероприятия промежуточной аттестации; 16 часов занятия лекционного типа, 32 часа занятия семинарского типа (практические занятия), в том числе 2 часа – мероприятия текущего контроля успеваемости), 59 часов составляет самостоятельная работа обучающегося в течение семестра.

### Цели и задачи освоения дисциплины:

- овладение методами тензорной алгебры и подготовка студентов к изучению разделов теоретической физики и ряда специальных дисциплин, таких как теория упругости, кристаллография;
- освоение студентами специфики математического аппарата алгебры тензоров, операций с основными дифференциальными операторами и их комбинациями, а также ознакомление с физическими примерами тензорных величин;
- выработка у студентов практических навыков действий над тензорными величинами, преобразований систем координат, использования интегральных теорем векторного анализа.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

В результате освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» у студентов формируются и развиваются следующие компетенции:

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)  | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции   |   | Наименование оценочного средства  |
|---|---|---|---|
|   | Индикатор достижения компетенции<br>(код, содержание индикатора)  | Результаты обучения по дисциплине   |   |
| ОПК-1.<br>Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности | Знать основные теоретические положения векторного и тензорного анализа.<br><br>Уметь решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания | Знать основные теоретические положения векторного и тензорного анализа.<br><br>Уметь решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания | 1. Индивидуальное собеседование.<br>2. Выполнение практических заданий. |

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
|  | основ векторного и тензорного анализа.<br>Владеть навыками расчётов с использованием основ векторного и тензорного анализа. | основ векторного и тензорного анализа.<br>Владеть навыками расчётов с использованием основ векторного и тензорного анализа. |  |
|--|---|---|--|

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

|   |                        |
|---|------------------------|
| Общая трудоемкость                      | 3 ЗЕТ                  |
| Часов по учебному плану                 | 108                    |
| в том числе                             |                        |
| аудиторные занятия (контактная работа): |                        |
| - занятия лекционного типа              | 16                     |
| - занятия практического типа            | 32                     |
| самостоятельная работа                  | 59 (работа в семестре) |
| Промежуточная аттестация                | 3-зачёт                |

#### 3.2 Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины  | Всего (часы) | в том числе  |                           |                            |       | Самостоятельная работа в течение семестра, часы |
|--|--------------|--|---------------------------|----------------------------|-------|---|
|  |              | контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) в течение семестра, часы, из них |                           |                            |       |   |
|  |              | Занятия лекционного типа   | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего |   |
| <b>1. Векторная алгебра.</b><br>Понятие линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Декартова систем координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование компонент вектора при повороте системы | 14           | 2  | 4                         | —                          | 6     | 8   |

|   |    |   |   |   |    |    |
|---|----|---|---|---|----|----|
| координат. Матрица поворота и ее свойства.  |    |   |   |   |    |    |
| <b>2. Тензорная алгебра.</b><br>Определение тензора. Ранг тензора.<br>Сложение, умножение тензоров.<br>Свертка. Скалярное умножение тензоров. Теорема деления.  | 16 | 2 | 4 | — | 6  | 10 |
| <b>3. Приложения теории тензоров.</b><br>Симметрия тензоров. Инвариантность тензорных соотношений. Тензор поляризации, тензор механических напряжений, тензор инерции. Главные оси и главные значения тензора. Тензорная поверхность. Инварианты тензоров второго ранга. Изотропные тензоры. Тензор Леви-Чивита. Векторное, двойное векторное и смешанное произведения в тензорной форме. | 28 | 4 | 8 | — | 12 | 16 |
| <b>4. Тензорные поля.</b><br>Градиент, ротор и дивергенция. Понятия потенциального и вихревого полей. Дифференциальные операции 2-го порядка, оператор Лапласа. Интегральные теоремы векторного анализа. Векторные тождества.   | 28 | 4 | 8 | — | 12 | 16 |
| <b>5. Криволинейные системы координат.</b><br>Криволинейные системы координат, сферические и цилиндрические координаты. Коэффициенты Ламе. Метрический тензор. Якобиан. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.   | 12 | 2 | 4 | — | 6  | 6  |
| <b>6. Преобразования компонент векторов при инверсии системы координат.</b><br>Инверсия декартовой системы координат. Правая и левая тройки базисных векторов. Полярный и аксиальный векторы. Скаляры и псевдоскаляры.  | 10 | 2 | 4 | — | 6  | 4  |
| <b>В т.ч. текущий контроль</b>  | 2  | 2 |   |   |    | —  |
| <b>Промежуточная аттестация – зачет</b>   |    |   |   |   |    |    |

#### 4. Образовательные технологии

- 1) Чтение лекций;
- 2) сопровождение лекций написанием и выводом формул, построением графиков, изображением рисунков на доске;

- 3) методика «вопросы и ответы»;
- 4) выполнение практического задания у доски;
- 5) индивидуальная работа над практическим заданием;
- 6) работа в парах над практическим заданием;
- 7) работа в малых группах над практическим заданием;
- 8) методика «мозговой штурм».

## 5. Учебно-методическое обеспечение, формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся предполагает изучение конспектов лекций, выделенных разделов основной литературы, а также дополнительной литературы, выполнение практических заданий, отвечающих изучаемым разделам дисциплины. Перечень основной и дополнительной литературы для самостоятельного изучения приведен в п. 7 настоящей Рабочей программы дисциплины. Контрольные вопросы для промежуточной аттестации, примеры практических заданий приведены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

## 6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

**6.1 Перечень компетенций выпускников образовательной программы, в формировании которых участвует дисциплина, с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений) приведён выше (раздел 2). Ниже приведена таблица образовательных дескрипторов (отличительных признаков уровней освоения компетенций)**

| Индикаторы компетенции | ОЦЕНКА СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИИ   |  |   |  |  |   |  |
|------------------------|---|--|---|--|--|---|--|
|                        | Плохо   | Неудовлетворительно  | Удовлетворительно   | Хорошо   | Очень хорошо   | Отлично   | Превосходно  |
| <u>Знания</u>          | Отсутствие знаний теоретического материала или невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа. | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок. | Уровень знаний в объеме, полностью соответствующем программе подготовки, допущены одна-две незначительных ошибки. | Уровень знаний в объеме, полностью соответствующем программе подготовки, либо, возможно, превышающем ее. Без ошибок. |

|   |  |   |   |   |   |   |   |
|---|--|---|---|---|---|---|---|
| <u>Умения</u>                               | Отсутствие минимальных умений<br><br>или<br><br>невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа.             | При решении стандартных задач и/или выполнении стандартных практических заданий не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками и/или выполнены все практические задания, но не в полном объеме.   | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками и/или выполнены все практические задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.   | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с некоторыми недочетами и/или выполнены все практические задания, в полном объеме, но некоторые с небольшими недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами и/или выполнены все практические задания в полном объеме.                    | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи и/или выполнены все практические задания, в полном объеме без недочетов.   |
| <u>Навыки (владения)</u>                    | Отсутствие владения материалом<br><br>или<br><br>невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа.           | При решении стандартных задач и/или выполнении стандартных практических заданий не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач и/или выполнения стандартных практических заданий с некоторыми недочетами.  | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач и/или выполнении практических заданий с некоторыми недочетами.  | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач и/или выполнении практических заданий без ошибок и недочетов.   | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач и/или выполнении нестандартных практических заданий без ошибок и недочетов.   | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач и/или выполнению нестандартных практических заданий.  |
| Характеристика сформированности компетенции | Компетенция совершенно не сформирована. Отсутствуют знания, умения, навыки, необходимые для решения практических (профессиональных) задач. | Компетенция не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков явно недостаточно для решения практических (профессиональных) задач.               | Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по большинству практических задач. | Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям, но есть недочеты. Имеющихся знаний, умений и навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по некоторым профессиональным | Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач.         | Сформированность компетенции полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных практических (профессиональных) задач. | Сформированность компетенции превышает стандартные требования. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для применения творческого подхода к решению сложных практических (профессиональных) задач. |

|  |  |  |  |          |  |  |  |
|--|--|--|--|----------|--|--|--|
|  |  |  |  | задачам. |  |  |  |
|--|--|--|--|----------|--|--|--|

## 6.2 Описание шкал оценивания

Промежуточной аттестацией для дисциплины «Векторный и тензорный анализ» является зачет.

По итогам зачета выставляется оценка «Зачтено» или «Не зачтено». Оценка «Не зачтено» означает отсутствие аттестации, оценка «Зачтено» выставляется при успешном прохождении аттестации.

## 6.3 Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

Контрольные вопросы для индивидуального собеседования представлены настоящей Рабочей программы дисциплины.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

Примеры практических заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации представлены настоящей Рабочей программы дисциплины.

Критериями оценивания являются полнота знаний, наличие умений и владений (навыков), перечисленных настоящей Рабочей программы дисциплины.

**«Не зачтено»** – обучающийся не продемонстрировал представления об основных теоретических разделах курса, не показал минимально допустимый уровень умений и навыков выполнения практических заданий;

**«Зачтено»** – обучающийся продемонстрировал изложение формулировок основных теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения практических заданий базового уровня сложности.

## 6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции

6.4.1. При проведении промежуточной аттестации обучающимся предлагаются следующие контрольные вопросы, охватывающие программу дисциплины «Векторный и тензорный анализ»:

1. Линейная зависимость векторов.
2. Базис в векторном пространстве. Декартова система координат.
3. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат.
4. Операции над тензорными величинами.

5. Теорема деления.
6. Симметрия тензоров. Симметричная и антисимметричная составляющие тензора второго ранга.
7. Приведение симметричного тензора второго ранга к диагональному виду.
8. Тензорная поверхность.
9. Изотропные тензоры.
10. Оператор «набла» (примеры использования).
11. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламэ.
12. Криволинейные координаты. Якобиан.
13. Полярные и аксиальные векторы.
14. Тензор инерции твердого тела.

6.4.2. Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

1. Дан вектор  $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$ , где  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  – взаимно перпендикулярные векторы, причем  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  и  $|\vec{c}| = 3$ . Найти углы между вектором  $\vec{p}$  и а) векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ; б) векторами  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $-(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .
2. При каком значении  $t$  векторы  $\vec{a} = \{3, 6, 9\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 5, 8\}$ ,  $\vec{c} = \{4, 7, t\}$  компланарны?
3. Параллелепипед построен на некопланарных векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Найти площади его диагональных сечений и объем.
4. Компоненты двух векторов заданы в различных системах координат следующим образом: при повороте системы координат  $K$  вокруг оси  $Oy$  на  $30^\circ$   $\vec{a}' = \{1, 1, \sqrt{3}\}$ , а при повороте  $K$  вокруг оси  $Oz$  на  $45^\circ$   $\vec{b}'' = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$ . Найти скалярное произведение этих векторов.
5. Доказать, что произведение  $\delta_{ij} A_j B_n C_n$  является вектором, если  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$  – векторы.
6. В некоторой декартовой системе координат имеет место соотношение  $T_{nkm} = A_{mi} R_{ink}$ . Доказать, что  $A_{mi}$  – тензор II-го ранга, если  $T_{nkm}$  и  $R_{ink}$  – тензоры III-го ранга.
7. В некоторой системе координат известны компоненты двух векторов –  $\vec{A} = \{1, 2, -1\}$  и  $\vec{B} = \{2, 3, -4\}$ . Найти матрицу тензора  $T_{ij} = A_i B_j - \varepsilon_{ijk} A_k$  и вычислить его след.
8. Пусть вектор  $\vec{A}$  имеет компоненты  $\{1, 2, 3\}$ . Найти следующую свертку:  $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{klm} A_m$ .
9. Материал, характеризуемый тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ , помещен в однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ . Найти тензор диэлектрической восприимчивости  $\alpha_{ij}$  диэлектрика ( $4\pi\alpha_{ik} = \varepsilon_{ik} - \delta_{ik}$ ). Найти вектор поляризации диэлектрика  $\vec{P}$  и вектор электрической индукции  $\vec{D}$  ( $P_i = \alpha_{ik} E_k$ ,  $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ ). Найти углы, которые векторы  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  образуют друг с другом, а также указать направления, для которых векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  коллинеарны:



$$\text{а). } \vec{E} = E_0 \{ 2, 1, -2 \};$$

$$\text{б). } \vec{E} = E_0 \{ -2, 2, 1 \}.$$

10. В некоторой системе координат известны компоненты тензора II-го ранга:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Разложить его на симметричную } S_{ij} \text{ и } A_{ij} \text{ антисимметричную}$$

составляющие. Найти  $Sp(S_{in} A_{nj})$ .

11. Найти градиент скалярной функции  $\varphi$ :

$$\text{а). } \varphi = \frac{e^{(\vec{a} \cdot \vec{r})}}{r};$$

$$\text{в). } \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})^3}{r^2};$$

$$\text{д). } \varphi = \frac{\sin r}{r};$$

$$\text{б). } \varphi = r^3 (\vec{c} \cdot \vec{r});$$

$$\text{г). } \varphi = ((\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \sin(\vec{b} \cdot \vec{r}));$$

$$\text{е). } \varphi = (\vec{r} \cdot [\vec{a} r \times \vec{b}]).$$

12. Найти дивергенцию и ротор векторного поля  $\vec{A}$ :

$$\text{а). } \vec{A} = [\vec{a} \times \vec{r}];$$

$$\text{д). } \vec{A} = \frac{[\vec{u} \times \vec{r}]}{r^3};$$

$$\text{з). } \vec{A} = \left[ \frac{\vec{a}}{r} \times \vec{r} \right];$$

$$\text{б). } \vec{A} = \vec{c} \exp(\vec{k} \cdot \vec{r});$$

$$\text{е). } \vec{A} = [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot \sin r;$$

$$\text{и). } \vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} e^{(\vec{c} \cdot \vec{r})};$$

13.

Доказать

тождество:

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + [\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}] + [\vec{A} \times \text{rot } \vec{B}].$$

### 6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

1. Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.
2. Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

### 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Г.М. Максимова, А.И. Малышев, А.В. Тележников, Основы векторного и тензорного анализа для физиков: учебно-методическое пособие, Н.Новгород, изд-во ННГУ, 2017, 109 с.  
[http://www.unn.ru/books/met\\_files/VTM\\_Malyshev.doc](http://www.unn.ru/books/met_files/VTM_Malyshev.doc).
2. И.Э. Келлер, Тензорное исчисление: учеб. Пособие, Санкт-Петербург, Лань, 2012, 176 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3814>.
3. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности: учебное пособие, СПб.: Лань, 2010, 480 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/544>.

б) дополнительная литература:

1. А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов, Векторный анализ и начало тензорного исчисления, М., Высшая школа, 1966, 252 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 10 экз.  
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=94886>
2. В.Г. Левич, Курс теоретической физики, Т. 1. М., Наука, 1969, 910 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 12 экз.

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=72316>

3. Б.М. Будак, С.В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, М., Наука, 1967, [607 с.](#) Фонд

<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=448406>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы Фундаментальной библиотеки ННГУ <http://www.lib.unn.ru/>.

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями установленного ННГУ образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 28.03.01 – «Нанотехнологии и микросистемная техника».

Автор,  
доцент кафедры  
теоретической физики  
к.ф.-м.н., доцент Д.В. Хомицкий

Рецензент:  
заведующий кафедрой  
физики полупроводников, электроники и нанoeлектроники  
д.ф.-м.н., профессор Д.А. Павлов

Заведующий кафедрой  
теоретической физики  
д.ф.-м.н., доцент В.А. Бурдов

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии физического факультета ННГУ, протокол б/н от «14» декабря 2021 г.

Председатель  
Учебно-методической комиссии  
физического факультета ННГУ А.А. Перов