

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины
**Математическая теория динамического
хаоса**

Уровень высшего образования
Магистратура
(бакалавриат / магистратура / специалитет)
Направление подготовки / специальность
01.04.01 Математика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2023 год

Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части. Код дисциплины – **Б1.О.13.**

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1. Знать методы критического анализа проблемных ситуаций.	ЗНАТЬ 31(УК-1.1) основные термины, определения и результаты теории динамического хаоса.	<i>Тест</i>
	УК-1.2. Уметь вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций.	УМЕТЬ У1 (УК-1.2) применять эти и аналогичные методы при исследовании конкретных динамических систем. ВЛАДЕТЬ В1 (УК-1.2) методами конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач и делать заключение о характере (регулярности или хаотичности) реального процесса.	<i>Задачи</i> <i>Реферат</i>
	УК-1.3. Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций.	ВЛАДЕТЬ В1 (УК-1.3) аналитическими (качественными) и численными методами исследования систем со сложной динамикой.	<i>Задачи</i>
ОПК-2: Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1. Знать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	ЗНАТЬ 31(ОПК-2.1) основные определения и результаты математической теории динамического хаоса. УМЕТЬ У1 (ОПК-2.1) основные определения и результаты математической теории динамического хаоса.	<i>Собеседование</i> <i>Собеседование</i>
	ОПК-2.2. Уметь модифицировать, анализировать и реализовывать математические	УМЕТЬ У1 (ОПК-2.2) применять полученные знания при изучении конкретных динамических систем со сложным поведением траекторий.	<i>Реферат</i>

	модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.		
	ОПК-2.3. Владеть навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	ВЛАДЕТЬ В1 (ОПК-2.3) методами компьютерного моделирования динамических систем со сложным поведением траекторий.	<i>Задачи</i>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	34
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	38
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе					
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные работы	Консультации индивидуальные	Всего контактных часов	СРС

Введение.	11	2	2			4	7
Странные аттракторы многомерных потоков	13	3	3			6	7
Странные аттракторы дискретных динамических систем (диффеоморфизмов)	13	3	3			6	7
Смешанная динамика	17	4	4			8	9
Хаотическая динамика математических моделей естествознания	16	4	4			8	8
Текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация - экзамен	36						
Итого	108	16	16			32	38

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

К видам самостоятельной работы обучающихся относятся: изучение литературы, выступление на семинаре с ответами на вопросы преподавателя и студентов.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.	Уровень знаний ниже минимальных требований.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, превышающем программу

	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки.	много негрубых ошибки.	подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	программе подготовки, без ошибок.	подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Уровень подготовки	
Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция

	сформирована на уровне «удовлетворительно»
Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

<i>вопросы</i>	<i>Код формируемой компетенции</i>
Что такое динамическая система? Что такое каскады и потоки?	УК-1, ОПК-2
Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем.	УК-1, ОПК-2
Почему топологически сопряженные системы имеют одинаковые периоды периодических точек?	УК-1, ОПК-2
Дайте определения следующих инвариантных множеств динамической системы: альфа- и омега-предельное множество, множество рекуррентных (устойчивых по Пуассону) множеств, неблуждающее множество.	УК-1, ОПК-2
Транзитивные и цепно-транзитивные системы. Траектории и ε -траектории дискретной динамической системы. Приведите примеры транзитивных и цепно-транзитивных систем.	УК-1, ОПК-2
Аттрактор и репеллер. Поглощающая область и максимальный аттрактор.	УК-1, ОПК-2
Определение аттрактора по Рюэлю. CRN-аттрактор. Полный аттрактор. Аналогичная теория — для репеллеров.	УК-1, ОПК-2
Теорема Конли о существовании аттрактора и репеллера у системы на компактном фазовом пространстве. Смешанная динамика.	УК-1, ОПК-2
Гомоклинические и гетероклинические траектории. Критерии хаоса по Пуанкаре и спирального хаоса по Шильникову	УК-1, ОПК-2
Условия гиперболичности и подковы Смейла. Гиперболические аттракторы: определение и примеры.	УК-1, ОПК-2
Квазиаттракторы: определение и примеры. Аттракторы в отображении Эно.	УК-1, ОПК-2
Настоящие аттракторы. Дикие гиперболические и псевдогиперболические аттракторы. Определения и примеры. Дикий спиральный аттрактор Тураева-Шильникова.	УК-1, ОПК-2
Трехмерные обобщенные отображения Эно. Основные бифуркации неподвижных точек. Построение бифуркационных диаграмм.	УК-1, ОПК-2
Метод карт седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно.	УК-1, ОПК-2

Определение показателей Ляпунова. Метод диаграмм Ляпунова и его компьютерные реализации. Объяснение типов динамики отображения на примере его диаграммы Ляпунова (в случае двухпараметрического семейства трехмерных отображений Эно).	УК-1, ОПК-2
Спиральные аттракторы. Теория Шильникова. Описание феноменологического сценария возникновения спирального аттрактора в случае трехмерных потоков.	УК-1, ОПК-2
Аттрактор Лоренца. Геометрическая модель Афраймовича – Быкова - Шильникова.	УК-1, ОПК-2
Типы дискретных гомоклинических аттракторов трехмерных отображений. Дискретные аттракторы Лоренца и восьмерочные аттракторы, и феноменологические сценарии их возникновения.	УК-1, ОПК-2
Обзор странных аттракторов трехмерных неориентируемых отображений Эно.	УК-1, ОПК-2
Обзор компьютерных методов исследования странных аттракторов на примере трехмерных систем (потоков и/или отображений)	УК-1, ОПК-2

5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Что такое динамическая система? Что такое каскады и потоки? Привести примеры двумерных и трехмерных каскадов и потоков.
2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем. Показать, что линейный узел сопряжен линейному фокусу в двумерном случае.
3. Почему период периодических точек сохраняется при топологической сопряженности? Показать, что у топологически сопряженных систем одинаковое число периодических точек.
4. Привести примеры следующих инвариантных множеств динамической системы: альфа- и омега-предельное множество, множество рекуррентных (устойчивых по Пуассону) траекторий, неблуждающее множество.

5.2.3. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Аттрактор и репеллер. Поглощающая область и максимальный аттрактор. Привести примеры максимальных аттракторов, которые не являются аттракторами.
2. Определение аттрактора по Рюэлю. CRH-аттрактор. Полный аттрактор. Аналогичная теория — для репеллеров. Привести примеры CRH-аттракторов.

3. Гомоклинические и гетероклинические траектории. Критерии хаоса по Пуанкаре и спирального хаоса по Шильникову. Сформулировать теорему Шильникова.
4. Условия гиперболичности и подковы Смейла. Гиперболические аттракторы: определение и примеры. Дать символическое описание неблуждающего множества в подкове Смейла.

5.2.4. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Квазиаттракторы: определение и примеры. Аттракторы в отображении Эно. Построить на компьютере аттрактор Эно при $b=0.1$ и $b=-0.3$.
2. Настоящие аттракторы. Дикие гиперболические и псевдогиперболические аттракторы. Определения и примеры. Дикий спиральный аттрактор Тураева-Шильникова. Дать определение гиперболических и псевдогиперболических инвариантных множеств, сравнить динамические свойства таких множеств.
3. Трехмерные обобщенные отображения Эно. Исследовать основные бифуркации неподвижных точек в случае конкретного примера, данного преподавателем: а) седло-узловая бифуркация; б) бифуркация удвоения периода; в) бифуркация Андронова-Хопфа.
4. Метод карт седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно. Построить карту седел для разных значений явобиана B . Например, для а) $B=0.1$; б) $B=0.5$; в) $B=1$.

5.2.5. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Дать определение показателей Ляпунова. Объяснить суть метод диаграмм Ляпунова и его компьютерной реализации. Объяснить типы динамики отображения на примере его диаграммы Ляпунова (для случае двухпараметрического семейства трехмерных отображений Эно), диаграмма дается преподавателем.
2. Спиральные аттракторы. Теория Шильникова. Описать основные этапы феноменологического сценария возникновения спирального аттрактора в случае трехмерных потоков.
3. Аттрактор Лоренца. Геометрическая модель Афраймовича-Быкова-Шильникова. Описать основные бифуркации, приводящие к возникновению аттрактора в модели Лоренца в однопараметрическом семействе с $b=8/3$, $r=10$.
4. Типы дискретных гомоклинических аттракторов трехмерных отображений. Описать феноменологические сценарии возникновения дискретных а) аттракторов Лоренца; в) восьмерочных аттракторов.
5. Объяснение алгоритмов работы компьютерных методов исследования странных аттракторов на примере трехмерных систем (потоков и/или отображений) – одного из методов, рассмотренных в курсе, по выбору преподавателя.

5.2.4. Темы рефератов

1. Исследование странных гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых отображений Эно.
2. Исследование бифуркаций разрушения замкнутых инвариантных кривых трехмерных отображений.
3. Исследования спиральных аттракторов трехмерных систем (потоков и/или отображений).

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Болотов М.И., Гонченко С.В., Гонченко А.С., Гринес Е.А., Казаков А.О., Леванова Т.А., Лукьянов В.И. "Бифуркация Андронова-Хопфа для потоков и отображений": Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. (Фонд образовательных ресурсов ННГУ, рег.№ 1498.17.06; Режим доступа http://www.unn.ru/books/met_files/bifAndrH.pdf).

б) дополнительная литература:

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с. 25 экз.
2. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сборник, 1998, т. 189, №2, 137-160.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=300&option_lang=rus

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы) С.В. Гонченко

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой А.В. Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.