

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики  
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением ученого совета ННГУ  
протокол от  
«30» ноября 2022 г. № 13

**Рабочая программа дисциплины**

**Дополнительные главы математического  
анализа**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

**бакалавриат**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Прикладная математика и информатика (общий профиль)**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

**Очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2023 г.

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» относится к обязательной части.

Код дисциплины **Б1.О.019** «Дополнительные главы математического анализа»

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина <b>Б1.О.019</b> «Дополнительные главы математического анализа» относится к обязательной части ООП направления подготовки <i>01.03.02 Прикладная математика и информатика</i> .

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>УК-1.</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>УК-1.1.</b> Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	<b>Знать:</b> Различные методы и способы вычисления значений двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов. Формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского.	<i>Тестовые вопросы, вопросы для собеседования</i>
	<b>УК-1.2.</b> Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	<b>Уметь:</b> Решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным: 1. Вычислять с помощью повторных интегралов значения двойных и тройных интегралов 2. Применять двойные и тройные интегралы к решению геометрических задач 3. Вычислять криволинейные интегралы 1 и 2 рода 4. Вычислять поверхностные интегралы 1 и 2 рода 5. Записывать интегральные и дифференциальные соотношения на языке теории поля. Анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.	<i>Тестовые вопросы</i>
	<b>УК-1.3.</b> Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных	<b>Владеть:</b> Способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	<i>Тестовые вопросы</i>

	текстов.		
<b>ОПК-1:</b> Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	<b>ОПК-1.1.:</b> Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<b>Знать:</b> Основные понятия математического анализа, понятия квадратуры, двойного интеграла, тройного интеграла, якобиана, криволинейного интеграла, поверхностного интеграла, условия независимости интеграла от пути, от поверхности, понятия теории поля и взаимосвязь между ними.	Вопросы для собеседования
	<b>ОПК-1.2.:</b> Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Уметь:</b> Вычислять значение двойного и тройного интегралов, криволинейных и поверхностных, вычислять якобианы переходов, выбирать подходящую замену переменных, выбор системы координат	Вопросы для собеседования
	<b>ОПК-1.3.:</b> Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности.	<b>Владеть :</b> Навыком вычисления интегралов, сведения интегралов к повторным	Вопросы для собеседования

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>Очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>3 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	<b>34</b>
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа	<b>0</b>
- занятия лабораторного типа	<b>0</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>38</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

<b>Наименование и краткое содержание</b>	<b>Всего</b>	<b>В том числе</b>
------------------------------------------	--------------	--------------------

разделов и тем дисциплины	(часы)	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
<p>Тема 1</p> <p>Кратные интегралы. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Определение и свойства двойного интеграла.</p> <p>Приведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных. Геометрический смысл якобиана преобразования. Полярная замена координат.</p> <p>Тройные и многократные интегралы. Приведение к повторным. Замена переменных. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве. Геометрические приложения двойных интегралов: объем бруса, площадь поверхности в случае явного и параметрического задания.</p> <p>Приложения кратных интегралов к задачам механики: масса, статические моменты, центр масс, моменты инерции.</p>	18	8	0		8	10
<p>Тема 2</p> <p>Криволинейные интегралы. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого ряда, его вычисление.</p> <p>Криволинейный интеграл второго ряда. Соотношение криволинейных интегралов. Вычисление криволинейного интеграла второго ряда</p> <p>Ориентация контура. Плоская односвязная область. Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина.</p> <p>Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу.</p>	18	8	0		8	10

<p>Тема 3</p> <p>Поверхностные интегралы. Поверхностный интеграл первого рода. Вычисление с помощью двойного интеграла.</p> <p>Двусторонние поверхности. Поверхностный интеграл второго рода. Вычисление с помощью двойного интеграла. Связь поверхностных интегралов.</p> <p>Поверхностно односвязная область. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования.</p> <p>Восстановление функции трех переменных по ее полному дифференциалу.</p> <p>Пространственно односвязная область. Формула Остроградского и ее геометрические приложения.</p>	17	8	0		8	9
<p>Тема 4</p> <p>Векторный анализ. Физические задачи, приводящие к понятиям скалярного и векторного полей.</p> <p>Оператор Гамильтона. Градиент. Поле градиентов. Дивергенция (расходимость) векторного поля. Ротор. Поле роторов.</p> <p>Циркуляция векторного поля. Поток векторного поля. Формулы Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме.</p> <p>Соленоидальные векторные поля. Условия соленоидальности поля, физический смысл дивергенции.</p> <p>Потенциальные векторные поля. Критерий потенциальности векторного поля.</p>	17	8	0		8	9
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Экзамен	36					
<b>Итого</b>	<b>108</b>	<b>32</b>	<b>0</b>		<b>34</b>	<b>38</b>

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен)

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельное повторение теоретического материала и решение практических примеров по сборнику задач по дисциплине.

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины включает выполнение домашних заданий, подготовку к тестированию и экзамену. Для самоконтроля у студента имеется возможность удаленного тестирования по дистанционному лекционному курсу.

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=289>

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, указанным в списке литературы, решении практических задач, подготовке ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

### Учебно-методическое обеспечение

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: / М; СПб.: Физматлит: Невский диалект, 2002 – 728 с. (247 экз.)
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. М.: АСТ Астрель, 2010. 558 с. (252 экз.)
3. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу / М.И.Т. (в 3 т), 2003 – 472 с. (116 экз.)
4. Графики функций: учебно-метод. пособие. Сост. Т.П. Киселева, И.И. Олюнина. - Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 43с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены

	вследствие отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки.	ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Что называется несобственным интегралом первого, второго рода?	ОПК-1
2. Напишите интеграл Эйлера-Пуассона. Как найти значение этого	ОПК-1

интеграла?	
3. Напишите интеграл Дирихле. Как найти значение этого интеграла?	ОПК-1
4. Что такое гамма-функция, бета-функция? Зачем они нужны?	ОПК-1
5. Как интегрировать функцию двух переменных? Дайте определение двойного интеграла.	ОПК-1
6. Что такое повторные интегралы? Как поменять порядок интегрирования в повторном интеграле?	ОПК-1
7. Как сделать замену переменных в двойном интеграле?	ОПК-1
8. Что такое тройной интеграл и многократные интегралы?	ОПК-1
9. Как вычислить двойной, тройной интеграл?	ОПК-1
10. Какие приложения двойных интегралов вам известны?	ОПК-1
11. Как найти площадь плоской области, объем цилиндрического тела, площадь гладкой криволинейной поверхности, центр тяжести пластины?	ОПК-1
12. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве.	ОПК-1
13. Как определяется криволинейный интеграл первого, второго рода?	ОПК-1
14. Зависит ли криволинейный интеграл первого рода от направления интегрирования? Что можно сказать в этом случае относительно криволинейного интеграла второго рода?	ОПК-1
15. Как вычислить криволинейный интеграл первого, второго рода?	ОПК-1
16. Когда криволинейный интеграл второго рода не зависит от вида кривой интегрирования?	ОПК-1
17. Как восстановить функцию по ее частным производным (дифференциалу) с помощью криволинейного интеграла второго рода?	ОПК-1
18. Какая связь между криволинейным интегралом второго рода и двойным интегралом?	УК-1
19. Ориентация контура. Плоская односвязная область. Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина.	ОПК-1
20. Как определяется поверхностный интеграл первого, второго рода?	ОПК-1
21. Как вычислить поверхностный интеграл первого, второго рода?	ОПК-1
22. Какая область называется поверхностно односвязной? Формула Стокса.	УК-1
23. Какая связь между криволинейным интегралом второго рода и поверхностным интегралом первого рода?	УК-1
24. Какая связь между поверхностным интегралом второго рода и тройным интегралом?	УК-1
25. Каковы приложения криволинейных и поверхностных интегралов в теории поля?	УК-1
26. Формула Остроградского и ее геометрические приложения.	УК-1
27. Оператор Гамильтона. Градиент	ОПК-1
28. Дивергенция (расходимость) векторного поля. Ротор. Поле роторов.	УК-1
29. Циркуляция векторного поля. Поток векторного поля.	ОПК-1
30. Формулы Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме.	УК-1
31. Соленоидальные векторные поля. Потенциальные векторные поля.	УК-1

## 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1

### 1. Тип – одиночный выбор.

Укажите, какое из представленных выражений соответствует якобиану сферической замены переменных  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$  ?

- $J = r$
- $J = r^2 \cos \varphi \cos \psi$



- $J = r^2 \cos \psi (+)$

2. Тип – одиночный выбор.

Какое из нижеприведенных выражений соответствует верной расстановке пределов интегрирования функции  $f(x, y)$  по области  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$  при применении сферической замены  $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$  ?

- $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^2 f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r dr (+)$

- $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\psi \int_0^2 f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r dr$

- $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^2 f(r, \varphi, \psi) r dr$

3. Тип – одиночный выбор.

Укажите, какое из представленных выражений является формулой вычисления криволинейного интеграла?

- $\int_L f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt (+)$

- $\int_L f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t)) \sqrt{1 + x'^2(t) + y'^2(t)} dt$

- $\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) dx$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: / М; СПб.: Физматлит: Невский диалект, 2002 – 728 с.(247 экз.)

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб.пособие. М.: АСТ Астрель, 2010 .558 с. (252 экз.)

3. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу / М.И.Т.(в 3 т), 2003 – 472 с. (116 экз.)

4. Графики функций: учебно-метод. пособие. Сост. Т.П.Киселева, И.И.Олюнина. - Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 43с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>

5. Числовые ряды. Учебно-методическое пособие. Составители: Киселева Т.П., Трубачева А.Л. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. - 32с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>

6. Калашников А.Л., Фокина В.И. Задачи по методам вычислений. Численное интегрирование. Учебно – методическая разработка. Н.Новгород, ННГУ, 1997. <http://www.unn.ru/books/resources.html>

б) Дополнительная литература

1. ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I / М.: 2009. — 648 с. (105 экз.)

2. ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: / М.: 2009. — 464 с. (112 экз.)

3. Контрольные задачи на функциональные последовательности и ряды, интеграл и ряды Фурье. Практикум. Составители: Калашников А.Л., Федоткин А.М., Фокина В.Н. – Н. Новгород, Нижегородский госуниверситет, 2011. – 22с. – Фонд эле... ННГУ, рег. № 383.11.0. –URL: <http://www.unn.ru/books/resources.html>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

<http://new.e-vmk.unn.ru/sites/>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Авторы: к.ф.-м.н., доцент кафедры ДУМиЧА Кротов Н.В.

преподаватель кафедры ДУМиЧА Сизова Н.А.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ДУМиЧА: д.ф.-м.н. Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.