

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«14» декабря 2021 г. № 4

### **Рабочая программа дисциплины**

Методы оптимизации

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Направление подготовки / специальность  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

Форма обучения  
очная

Нижегород

2022 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

| № варианта | Место дисциплины в учебном плане образовательной программы                              | Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД  |
|------------|---|--|
| 1          | Блок 1. Дисциплины (модули)<br>Часть, формируемая участниками образовательных отношений | Дисциплина Б1.В.07, «Методы оптимизации», относится к части, формируемой участниками образовательных отношений направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки |

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)                      | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции  |   | Наименование оценочного средства |
|---|--|---|----------------------------------|
|   | Индикатор достижения компетенции*<br>(код, содержание индикатора)  | Результаты обучения по дисциплине**   |                                  |
| <b>ПК-1.</b> Способен решать актуальные задачи математики и компьютерных наук | ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий для решения актуальных задач математики и компьютерных наук | Знание:<br>31) основных фактов из математического анализа, геометрии, алгебры и других дисциплин, на которые опирается изучение методов оптимизации<br>32) основных принципов и методов создания, анализа, аналитического и численного исследования математических моделей в области методов оптимизации:<br>1. основные понятия и факты из выпуклого анализа, включая свойства выпуклых функций;<br>2. запись условий оптимальности для различных типов задач математического программирования: условия Лагранжа, Каруша–Куна–Таккера, достаточные условия второго порядка и их роль в построении численных методов;<br>3. классические и эффективные вычислительные методы одномерной, многомерной локальной и глобальной оптимизации и условия их применимости;<br>4. методы учета ограничений в локальной и многоэкстремальной оптимизации.<br>5. принцип максимума Л.С. Понтрягина в задачах оптимального управления;<br>6. необходимые условия экстремума в | <i>тест</i>                      |

|  |  |   |        |
|--|--|---|--------|
|  |  | <p><i>простейших задачах вариационного исчисления</i></p> <p>33) дополнительных принципов, факторов, понятий, методов из предметной области</p>   |        |
|  | <p>ПК-1.2. Умеет применять базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий при решении актуальных задач математики и компьютерных наук</p> | <p>Умение:</p> <p>У1) решать математические задачи и проблемы создания, анализа и исследования математических моделей из области методов оптимизации, применять численные и аналитические методы:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. выполнять математическую постановку задач оптимизации</li> <li>2. строить вычислительные схемы решения задач динамического программирования с помощью уравнений Беллмана;</li> <li>3. использовать методы свертки в задачах многокритериальной оптимизации;</li> <li>4. находить решения задач математического программирования, имеющих простое аналитическое описание, с использованием условий Каруша-Куна-Таккера;</li> <li>5. выбирать эффективные вычислительные методы решения нелинейных задач оптимизации различного типа и правильно интерпретировать полученные результаты.</li> <li>6. применять универсальные математические пакеты для выполнения оптимизационных расчетов;</li> <li>7. применять принцип максимума для аналитического решения простых задач оптимального управления;</li> <li>8. применять уравнение Эйлера и его обобщения, а также условия трансверсальности и условие Лежандра для решения задач вариационного исчисления.</li> </ol> <p>У2) доказывать ранее изученные в рамках дисциплины математические утверждения, а также новые, примыкающие к ним;</p> <p>У3) применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности;</p> | задачи |
|  | <p>ПК-1.3. Имеет практический опыт решения актуальных задач</p>  | <p>Владение:</p> <p>В1) терминологией предметной области;</p>   | задачи |

|  |                                |   |  |
|--|--------------------------------|---|--|
|  | математики и компьютерных наук | В2) принципами построения и выбора эффективных численных методов решения нелинейных задач оптимизации;<br>В3) приемами аналитического решения задач из различных разделов методов оптимизации и интерпретации результатов |  |
|--|--------------------------------|---|--|

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

|  |                             |
|--|-----------------------------|
|  | <b>очная форма обучения</b> |
| <b>Общая трудоемкость</b>                        | <b>7 ЗЕТ</b>                |
| <b>Часов по учебному плану</b>                   | <b>252</b>                  |
| <b>в том числе</b>                               |                             |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа)</b>    | <b>95</b>                   |
| <b>самостоятельная работа</b>                    | <b>121</b>                  |
| <b>Контроль</b>                                  | <b>36</b>                   |
| <b>Промежуточная аттестация – зачет, экзамен</b> |                             |

#### 3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины   | Всего (часы) | в том числе  |                           |                            |                        | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|---|--------------|--|---------------------------|----------------------------|------------------------|---|
|   |              | контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них |                           |                            |                        |   |
|   |              | Занятия лекционного типа   | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего контактных часов |   |
| 7 семестр   |              |  |                           |                            |                        |   |
| Тема 1.<br>Элементарный выпуклый анализ.<br>Выпуклые множества. Выпуклые конусы. Возможные направления. Выпуклые функции. Критерии выпуклости. Точки минимума выпуклых функций. | 35           |  | 6                         |                            | 6                      | 29  |

|  |     |    |    |  |    |    |
|--|-----|----|----|--|----|----|
| Тема 2.<br>Гладкие конечномерные задачи на экстремум. Теорема Вейерштрасса и ее следствия. Безусловный минимум: необходимые условия минимума первого и второго порядков, достаточные условия. Условный минимум: принцип Лагранжа в задачах с ограничениями типа равенства и неравенства, регулярность, гладко-выпуклые задачи, условия второго порядка.  | 23  | 4  | 9  |  | 13 | 10 |
| Тема 3.<br>Выпуклые конечномерные задачи на экстремум. Различные формы записи задач выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Теория двойственности. Случай задач линейного программирования.  | 26  | 7  | 9  |  | 16 | 10 |
| Тема 4.<br>Численные методы конечномерной оптимизации. Терминология. Классификация методов. Одномерный поиск для унимодальных и липшицевых функций. Безусловная минимизация функций нескольких переменных: градиентные методы, метод Ньютона, методы сопряженных направлений для квадратичных функций, метод сопряженных градиентов. Условная минимизация функций нескольких переменных: методы штрафных функций, симплекс-метод решения задач линейного программирования. | 23  | 5  | 8  |  | 13 | 10 |
| Текущий контроль (КСР)   | 1   |    |    |  | 1  |    |
| Промежуточная аттестация - зачет   |     |    |    |  |    |    |
| ИТОГО  | 108 | 16 | 32 |  | 59 | 59 |
| <b>8 семестр</b>   |     |    |    |  |    |    |
| Тема 5.<br>Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. Условия пер-   | 25  | 4  | 4  |  | 8  | 17 |

|   |    |   |   |  |    |    |
|---|----|---|---|--|----|----|
| <p>вого порядка.</p> <p>Простейшая задача: классификация экстремумов, варьирование, необходимые условия первого порядка (стационарность, уравнение Эйлера), конкретные примеры (задачи о брахистохроне и о наименьшей поверхности вращения). Принцип Гамильтона-Остроградского и его применения. Обобщения простейшей задачи: экстремальные задачи на линейных многообразиях в линейных нормированных пространствах, задачи со старшими производными, задачи с вектор-функциями, задачи с функциями нескольких переменных, задачи с подвижными границами, задачи на классе кусочно-гладких функций,</p> |    |   |   |  |    |    |
| <p>Тема 6.</p> <p>Условия второго порядка в вариационном исчислении. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления: необходимые условия Лежандра и Якоби слабого минимума, необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, достаточные условия локального минимума.</p>  | 25 | 6 | 6 |  | 12 | 13 |
| <p>Тема 7.</p> <p>Принцип Лагранжа в вариационном исчислении. Вариационные задачи с ограничениями. Изопериметрические задачи. Задачи со связями. Задача Лагранжа. Конкретные примеры: задача Дидоны, задача о цепной линии, задача Чаплыгина о самолете.</p>  | 28 | 6 | 6 |  | 12 | 16 |
| <p>Тема 8.</p> <p>Понятие о математической теории оптимального управления. Управляемые системы. Задачи оптимального управления классического</p>  | 28 | 6 | 6 |  | 12 | 16 |

|  |     |    |    |  |    |     |
|--|-----|----|----|--|----|-----|
| вариационного типа (без ограничений на значения управления). Задачи оптимального управления понтрягинского типа (с ограничениями на значения управления). Принцип максимума Понтрягина. Конкретные иллюстративные примеры. |     |    |    |  |    |     |
| <b>Текущий контроль (КСР)</b>  | 2   |    |    |  | 2  |     |
| <b>Промежуточная аттестация - экзамен</b>  | 36  |    |    |  |    |     |
| <b>Итого за семестр</b>  | 144 | 22 | 22 |  | 46 | 62  |
| <b>Итого</b>   | 252 | 38 | 54 |  | 95 | 121 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет, экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Методы оптимизации» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к зачету и экзамену. Самостоятельная работа студентов (выполнение домашних практических заданий, подготовка к коллоквиуму, экзамену и зачету) обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами (см. ниже раздел 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины).

Для подготовки к зачету по темам 1 - 3, связанным с математическим программированием, студентам можно воспользоваться:

1. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
2. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
3. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

Указанные пособия содержат теоретический материал с иллюстрирующими подробными примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

|         |   |
|---------|---|
| Уровень | Шкала оценивания сформированности компетенций |
|---------|---|

| сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо  | неудовлетворительно  | удовлетворительно  | хорошо  | очень хорошо   | отлично  | превосходно   |
|--|--|--|--|---|--|--|---|
|  | Не зачтено   |  | зачтено  |   |  |  |   |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала.<br><br>Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.                                 | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.  | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок                                | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.   | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.  |
| <u>Умения</u>  | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа                     | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.<br><br>Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u>  | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа                   | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.<br><br>Имели место грубые ошибки.  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами                                      | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами   | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.  | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.  | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач   |

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка |             | Уровень подготовки   |
|--------|-------------|--|
|        | Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
|        | Отлично     | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично»     |



|                 |                     |  |
|-----------------|---------------------|--|
| зачтено         |                     | но», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»  |
|                 | Очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»           |
|                 | Хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»                       |
|                 | Удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не за-<br>чтено | Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»  |
|                 | Плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

| Вопрос   | Код формируемой компетенции |
|--|-----------------------------|
| 1. Определение и простейшие свойства выпуклых множеств.  | ПК-1                        |
| 2. Граничные точки выпуклых множеств.  | ПК-1                        |
| 3. Проекция точки на множество. Теоремы о проекции.  | ПК-1                        |
| 4. Неотрицательная и выпуклая комбинации точек.  | ПК-1                        |
| 5. Коническая и выпуклая оболочки множества.   | ПК-1                        |
| 6. Теоремы отделимости выпуклых множеств.  | ПК-1                        |
| 7. Опорные гиперплоскости.   | ПК-1                        |
| 8. Сопряженный конус. Теорема Фаркаша.   | ПК-1                        |
| 9. Возможные (допустимые) направления.   | ПК-1                        |
| 10. Определение выпуклой функции и его геометрический смысл. Простейшие свойства выпуклых функций. | ПК-1                        |
| 11. Дифференцируемость выпуклой функции по возможным направлениям.                                 | ПК-1                        |
| 12. Свойство непрерывности выпуклой функции.   | ПК-1                        |

|  |      |
|--|------|
| 13. Критерии выпуклости в классе дифференцируемых функций нескольких переменных.   | ПК-1 |
| 14. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций многих переменных.  | ПК-1 |
| 15. Точки минимума выпуклых функций. Критерий точки минимума выпуклой функции.   | ПК-1 |
| 16. Сильно выпуклые функции.   | ПК-1 |
| 17. Понятие о математической теории оптимизации и математическом программировании (МП) как одном из ее разделов. Примеры задач оптимизации.                              | ПК-1 |
| 18. Теорема Вейерштрасса и ее следствия.   | ПК-1 |
| 19. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Необходимые условия первого порядка.  | ПК-1 |
| 20. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Необходимые условия второго порядка.  | ПК-1 |
| 21. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Достаточные условия второго порядка.  | ПК-1 |
| 22. Направления спуска. Необходимое условие оптимальности в общей задаче минимизации. Необходимое и достаточное условия направления спуска для дифференцируемых функций. | ПК-1 |
| 23. Гладкие задачи на условный экстремум. Необходимое условие оптимальности первого порядка.   | ПК-1 |
| 24. Гладкие задачи на условный экстремум. Необходимое условие оптимальности в классе дважды дифференцируемых функций.  | ПК-1 |
| 25. Гладкие задачи на условный экстремум. Достаточное условие оптимальности в классе дважды дифференцируемых функций   | ПК-1 |
| 26. Классификация задач математического программирования.  | ПК-1 |
| 27. Принцип Лагранжа и его геометрический смысл.   | ПК-1 |
| 28. Достаточное условие глобального минимума в задаче выпуклого программирования.  | ПК-1 |
| 29. Простейшее условие регулярности в задаче математического программирования.   | ПК-1 |
| 30. Достаточные условия регулярности в задаче математического программирования: условие Слейтера.  | ПК-1 |
| 31. Достаточные условия регулярности в задаче математического программирования: условие линейности.  | ПК-1 |
| 32. Необходимые условия второго порядка в задаче математического программирования.   | ПК-1 |

|  |      |
|--|------|
| 33. Достаточные условия второго порядка в задаче математического программирования  | ПК-1 |
| 34. Выпуклое программирование. Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме.  | ПК-1 |
| 35. Понятие седловой точки функции Лагранжа. Критерий седловой точки.  | ПК-1 |
| 36. Теорема Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке. Связь с теоремой Куна-Таккера в дифференциальной форме.                                       | ПК-1 |
| 37. Понятие двойственной задачи и ее свойства.   | ПК-1 |
| 38. Теорема двойственности.  | ПК-1 |
| 39. Теорема Куна-Таккера в форме двойственности.   | ПК-1 |
| 40. Теорема существования решения в задачах ЛП.  | ПК-1 |
| 41. Теория двойственности для задач ЛП   | ПК-1 |
| 42. Классификация численных методов оптимизации.   | ПК-1 |
| 43. Метод дихотомии.   | ПК-1 |
| 44. Метод половинного деления.   | ПК-1 |
| 45. Метод золотого сечения.  | ПК-1 |
| 46. Безусловная минимизация функций многих переменных: овражный эффект.  | ПК-1 |
| 47. Безусловная минимизация функций многих переменных: метод наискорейшего спуска. Теорема о сходимости.   | ПК-1 |
| 48. Безусловная минимизация функций многих переменных: метод Ньютона: идея, алгоритм, достоинства и недостатки, сравнение с градиентными методами.           | ПК-1 |
| 49. Условная минимизация функций многих переменных: метод проекции градиента. Теорема о сходимости.  | ПК-1 |
| 50. Условная минимизация функций многих переменных: метод условного градиента. Теорема о сходимости.   | ПК-1 |
| 51. Условная минимизация функций многих переменных: метод квадратичного штрафа.  | ПК-1 |
| 52. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: каноническая задача ЛП. Приведение задач ЛП к каноническому виду.                               | ПК-1 |
| 53. Основные определения симплекс-метода: вершина, ребро, базис вершины. Соответствие между вершинами и базисами. Ребра, выходящие из невырожденной вершины. | ПК-1 |
| 54. Итерационный алгоритм симплекс-метода в невырожденном случае. Итерационные формулы. Симплекс-таблица (СТ). Анализ и пересчет СТ.                         | ПК-1 |
| 55. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: отыскание начальной вершины методом искусственного ба-  | ПК-1 |

|  |      |
|--|------|
| зиса   |      |
| 56. Простейшая задача вариационного исчисления. Классификация экстремумов. Экстремали функционала и экстремали задачи. | ПК-1 |
| 57. Основные леммы вариационного исчисления.   | ПК-1 |
| 58. Необходимые условия слабого локального экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.  | ПК-1 |
| 59. Задача о брахистохроне.  | ПК-1 |
| 60. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.                               | ПК-1 |
| 61. Задачи вариационного исчисления с вектор-функциями. Система уравнений Эйлера.                                      | ПК-1 |
| 62. Задачи вариационного исчисления с функциями нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.                | ПК-1 |
| 63. Принцип Гамильтона-Остроградского  | ПК-1 |
| 64. Изопериметрические задачи: постановка, принцип Лагранжа, условия регулярности.                                     | ПК-1 |
| 65. Задача Дидоны  | ПК-1 |
| 66. Задача Лагранжа  | ПК-1 |
| 67. Задача оптимального управления классического типа. Необходимые условия оптимальности                               | ПК-1 |
| 68. Задача оптимального управления понтрягинского типа. Принцип максимума Л.С.Понтрягина                               | ПК-1 |

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции

#### Вариант 1

Задача 1. Проверить на выпуклость функцию  $f(x) = (x_1)^2 - x_1x_2 + (x_2)^2$  на множестве  $X = R^2$ .

Задача 2. Существует ли точка глобального минимума в задаче оптимизации:  $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ ? Почему?

Задача 3. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:  $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Задача 4. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2x - y + 3z \rightarrow \min \\ x + 3y - 2z \leq 2, & 2x - y + z = 4, \\ y, z \geq 0. \end{cases}$$

Задача 5. Решить задачу  $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$  методом Ньютона, начав с точки (1,1).

Задача 6. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2xy] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

### 5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

#### Вариант 1 (Выпуклый анализ)

Задание 1. Проверить на выпуклость множество  $X = \Gamma_{c,\alpha}$ .

Задание 2. Проверить на выпуклость функцию  $f(x) = 3(x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2$ .

#### Вариант 2 (Общая задача оптимизации)

Задание 1. Для задачи  $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min$ ,  $(x^1)^2 + x^2 \leq 1$ ,  $x^2 \geq 0$ , построить допустимое множество и линии уровня целевой функции; указать точку глобального минимума (если она существует). Выполняются ли какие-то достаточные условия существования глобального минимума в этой задаче?

Задание 2. Решить задачу безусловной минимизации:  $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$ ,  
 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

#### Вариант 3 (Гладкие задачи математического программирования)

Задание 1. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:  
 $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min$ ,  $(x^1)^2 + x^2 \leq 1$ ,  $x^2 \geq 0$ .

Задание 2. Решить с помощью теоремы Куна-Таккера в дифференциальной форме задачу оптимизации:  
 $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x^1 + x^2 = 1$ ,  $x^1, x^2 \geq 0$ .

#### Вариант 4 (Выпуклое и линейное программирование)

Задание 1. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:  
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2y - x + 3z \rightarrow \min \\ 3x + y - 2z \leq 2, & 2y - x + z = 4, \\ x, z \geq 0. \end{cases}$$

Задание 2. Решить ту же задачу с помощью теоремы Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке.

#### Вариант 5 (Численные методы оптимизации)

Задание 1. Решить задачу  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \rightarrow \min$  методом Ньютона, начав с точки  $(1, -1)$ .

Задание 2. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования:  $f(x) = (c, x) \rightarrow \min$ ,  
 $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2, 1, 1, 0 \\ 1, 3, 0, 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $c = (1, -2, 2, 3)$ .

#### Вариант 6 (Вариационное исчисление)

Задание 1. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [2(y')^2 - 3y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Задание 2. Найти экстремали изопериметрической задачи:

$$J[y] = \int_0^{\pi} [(y')^2] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1, \quad K[y] = \int_0^{\pi} [y \cos x] dx = \frac{\pi}{2}.$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988.  
(В ФБ ННГУ 214 экз.)
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС. 2002.  
(В ФБ ННГУ 80 экз.)

### б) дополнительная литература:

3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория, примеры, задачи: учебное пособие. М.: Наука. 1984.  
(В ФБ ННГУ 155 экз.)
4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983.  
(В ФБ ННГУ 15 экз.)
5. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
6. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
7. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Методы оптимизации (Чернов А.В.)»,

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=5425>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>

|   |             |         |       |       |          |
|---|-------------|---------|-------|-------|----------|
| Фонд  | электронных | изданий | ННГУ. | Режим | доступа: |
| <a href="http://www.unn.ru/books/resources.html">http://www.unn.ru/books/resources.html</a> |             |         |       |       |          |

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (3++) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор (ы): Чернов А.В.,

Заведующий кафедрой: Иванченко М.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 1 декабря 2021 года, протокол № 2.