

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дополнительные главы функционального анализа

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.07 Дополнительные главы функционального анализа относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, выработать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь выработать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: Знает методы анализа и синтеза, принципы абстрактного мышления для исследования неклассических задач математической физики, возможные прикладные интерпретации дифференциальных уравнений с частными производными  УК-1.2: Умеет анализировать абстрактные классические задачи, возникающих при моделировании различных процессов.  УК-1.3: Владеет опытом анализа абстрактных неклассических задач, применения анализа и синтеза для создания методов их решения, опытом постановки и исследования задач, возникающих при моделировании различных процессов и явлений	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы Задания
ОПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук	ОПК-1.1: Знает основные классы дифференциальных уравнений в частных производных, используемых в	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы Задания

	<p>ОПК-1.2: Умеет выбирать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p> <p>ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности</p>	<p>естественных наук, классические математические модели, применяемые в естественных науках</p> <p>ОПК-1.2: Умеет исследовать неклассические задачи математической физики, возможные прикладные интерпретации дифференциальных уравнений с частными производными</p> <p>ОПК-1.3: Владеет опытом создания новых математических моделей, опытом исследования корректности этих моделей</p>		
--	---	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>58</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	

	0 Ф 0	0 Ф 0	(практические занятия/лабораторные работы), часы	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Необходимые сведения из теории конечно-номерных пространств	4	2		2	2
Тема 2. Вещественные и комплексные пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства	6	2		2	4
Тема 3. Ортогональность, подпространства. Теорема о проекции	6	2	2	4	2
Тема 4. Ортогональные системы	6	2		2	4
Тема 5. Теорема Рисса–Фреше о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве	4		2	2	2
Тема 6. Сильная и слабая сходимость в гильбертовом пространстве	8	2	2	4	4
Тема 7. Пространства $l_2$ . Изоморфизм сепарельных пространств	6	2		2	4
Тема 8. Пространство $L_2$ . Сходимость в среднем. Полнота пространства $L_p$	4	2		2	2
Тема 9. Полнота систем функций в $L_2$	4		2	2	2
Тема 10. Теория рядов Фурье	6	2		2	4
Тема 11. Обобщенные производные и пространства С.Л.Соболева	4	2		2	2
Тема 12. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	4	2		2	2
Тема 13. Унитарные операторы. Проекционные операторы. Положительные операторы. Квадратный корень из положительного оператора. Спектр самосопряженного оператора. Вполне непрерывный оператор	8	2	2	4	4
Тема 14. Линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами в гильбертовом пространстве	4	2		2	2
Тема 15. Принцип Шаудера и его применение	8	2	2	4	4
Тема 16. Полная непрерывность оператора вложения С.Л.Соболева	4	2		2	2
Тема 17. Обратные операторы. Теорема Банаха–Хана и ее следствия	4	2		2	2
Тема 18. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах	6	2		2	4
Тема 19. Сопряженные пространства и сопряженные операторы	6		2	2	4
Тема 20. Компактные множества в компактных метрических, нормированных и гильбертовых пространствах	4		2	2	2
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	16	50	58

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Необходимые сведения из теории конечнономерных пространств
2. Вещественные и комплексные пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства
3. Ортогональность, подпространства. Теорема о проекции
4. Ортогональные системы
5. Теорема Рисса–Фреше о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом

пространстве

6. Сильная и слабая сходимости в гильбертовом пространстве
7. Пространства  $l_2$ . Изоморфизм сепарабельных пространств
8. Пространство  $L_2$ . Сходимость в среднем. Полнота пространства  $L_p$
9. Полнота систем функций в  $L_2$
10. Теория рядов Фурье
11. Обобщенные производные и пространства С.Л.Соболева
12. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве
13. Унитарные операторы. Проекционные операторы. Положительные операторы. Квадратный корень из положительного оператора. Спектр самосопряженного оператора. Вполне непрерывный оператор
14. Линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами в гильбертовом пространстве
15. Принцип Шаудера и его применение.
16. Полная непрерывность оператора вложения С.Л.Соболева
17. Обратные операторы. Теорема Банаха–Хана и ее следствия
18. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах
19. Сопряженные пространства и сопряженные операторы
20. Компактные множества в компактных метрических, нормированных и гильбертовых пространствах

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Дополнительные главы функционального анализа (МАТЕМАТИКА 1 маг)" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6837>).

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1:**

- Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых  $x, y, z$  справедливо тождество Аполлония  $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{x+y}{2}\|^2$ .
- Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых  $x, y, z, t$  справедливо неравенство Птолея  $\|x-z\| \cdot \|y-t\| \leq \|x-y\| \cdot \|z-t\| + \|y-z\| \cdot \|x-t\|$ . Когда в нем реализуется равенство?
- Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму  $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt, x \in C[-1,1]$ .
- Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму  $\langle x, f \rangle = \int_0^1 tx(t)dt, x \in C^1[-1,1]$ .
- Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму  $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt, x \in L_1[-1,1]$ .
- Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму  $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt, x \in L_2[-1,1]$ .

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

- В линейном пространстве  $\tilde{L}_2[a, b]$  непрерывных на  $[a, b]$  функций положим  $(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)dt$ . Является ли это пространство гильбертовым?
- Будет ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный функционал  $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})dt$ ?
- Будет ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный функционал  $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t^2)dt$ ?
- Будет ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный функционал  $\langle x, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x(t^n)dt$ ?

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задача решена верно или с негрубыми ошибками.
не зачтено	Задача не решена или есть грубые ошибки.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
		не зачтено		зачтено			

компет							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворитель</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена

	но	дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1**

Вещественные и комплексные пространства со скалярным произведением.	УК-1
Гильбертовы пространства	УК-1
Ортогональность, подпространства. Теорема о проекции	УК-1
Ортогональные системы	УК-1
Теорема Рисса–Фреше о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве	УК-1
Сильная и слабая сходимости в гильбертовом пространстве	УК-1
Пространства $l^2$ . Изоморфизм сепарабельных пространств	УК-1
Пространство $L_2$ . Сходимость в среднем. Полнота пространства $L_p$	УК-1
Полнота систем функций в $L_2$	УК-1
Теория рядов Фурье	УК-1
Обобщенные производные и пространства <u>С.Л.Соболева</u>	УК-1
Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	УК-1

**5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

Унитарные операторы. Проекционные операторы.	ОПК-1
Положительные операторы. Квадратный корень из положительного оператора.	ОПК-1
Спектр самосопряженного оператора. Вполне непрерывный оператор	ОПК-1
Линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами в гильбертовом пространстве	ОПК-1
Принцип Шаудера и его применение.	ОПК-1
Полная непрерывность оператора вложения <u>С.Л.Соболева</u>	ОПК-1
Обратные операторы. Теорема <u>Банаха–Хана</u> и ее следствия	ОПК-1
Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах	ОПК-1
Сопряженные пространства и сопряженные операторы	ОПК-1
Компактные множества в нормированных пространствах	ОПК-1
Компактные множества в метрических пространствах	ОПК-1
Компактные множества в гильбертовых пространствах	ОПК-1

**Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	знание основного и дополнительным материала без ошибок
отлично	знание основного материала без ошибок и погрешностей
очень хорошо	знание основного материала с незначительными погрешностями
хорошо	знание основного материалом с рядом заметных погрешностей

Оценка	Критерии оценивания
удовлетворительно	знание основного материала с рядом негрубых ошибок
неудовлетворительно	наличие грубых ошибок в основном материале
плохо	отсутствие знаний материала

### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых  $x, y, z$  справедливы

$$\text{тождество Аполлония } \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2} \|x-y\|^2 + 2\|z-\frac{x+y}{2}\|^2.$$

2. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых  $x, y, z, t$  справедливо неравенство Птолемея  $\|x-z\| \cdot \|y-t\| \leq \|x-y\| \cdot \|z-t\| + \|y-z\| \cdot \|x-t\|$ .

Когда в нем реализуется равенство?

3. Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt, \quad x \in C[-1,1].$$

4. Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму

$$\langle x, f \rangle = \int_0^1 tx(t)dt, \quad x \in C^1[-1,1].$$

5. Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt, \quad x \in L_1[-1,1].$$

6. Доказать, что функционал является линейным непрерывным, и найти его норму

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt, \quad x \in L_2[-1,1].$$

### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. В линейном пространстве  $\tilde{L}_2[a,b]$  непрерывных на  $[a,b]$  функций положим

$$(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)dt. \text{ Является ли это пространство гильбертовым?}$$

2. Будет ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный функционал  $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})dt$  ?

3. Будет ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный функционал  $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t^2)dt$  ?

4. Будет ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный функционал  $\langle x, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x(t^n)dt$  ?

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	всестороннее владение навыками
отлично	хорошее владение навыками

Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	достаточное владение навыками
хорошо	посредственное владение навыками
удовлетворительно	минимальное владение навыками
неудовлетворительно	отсутствие навыков
плохо	полное отсутствие навыков

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А. Н., Фомин С. В. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0266-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665740&idb=0>.
2. Халмош Пауль Р. Гильбертово пространство в задачах / пер. с англ. И. Д. Новикова и Т. В. Соколовской ; под ред. Р. А. Минлоса. - М. : Мир, 1970. - 352 с. - 1.52., 10 экз.
3. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Люстерник Л. А., Соболев В. И. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 272 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-0976-1., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799625&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Шилов Георгий Евгеньевич. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. - М. : Наука, 1967. - 192 с. - 0.55., 1 экз.
2. Вулих Борис Захарович. Введение в функциональный анализ. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Наука, 1967. - 415 с. : черт. - 1.86., 29 экз.
3. Коллатц Лотар. Функциональный анализ и вычислительная математика / пер. с нем. И. Г. Нидеккер ; под ред. А. Д. Горбунова. - М. : Мир, 1969. - 447 с. : черт. - 1.90., 5 экз.
4. Рудин Уолтер. Основы математического анализа / пер. с англ. В. П. Хавина. - 2-е изд., стер. - М. : Мир, 1976. - 319 с. - 1.33., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.