

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
от 30.11.2022 г. протокол № 13

**Рабочая программа дисциплины**  
Метод граничных интегральных уравнений

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования  
магистратура

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование физико-механических процессов

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения  
очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород  
2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина <b>Б1.В.06</b> , Метод граничных интегральных уравнений относится к обязательной части ООП направления подготовки направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-5. Способен разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной деятельности	ПК-5.1. Знает типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности.	<b>Знать</b> основные понятия, математические модели метода граничных интегральных уравнений, современные методы исследования в области решения задач	<i>Собеседование</i>
	ПК-5.2. Умеет применять типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности	<b>Уметь</b> комбинировать и адаптировать современные методы решения прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических моделей	<i>Контрольная работа</i>
	ПК-5.3. Имеет навыки разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности.	<b>Владеть</b> навыками применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач.	<i>Контрольная работа</i>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>3 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- занятия лабораторного типа	2
- контроль самостоятельной работы (КСР)	
<b>самостоятельная работа</b>	<b>38</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

Очная форма обучения							
№	Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				СР <sup>1</sup> , часы
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				
			из них				
			ЗЛеТ <sup>2</sup>	ЗСеТ <sup>3</sup>	ЗЛаТ <sup>4</sup>	Всего	
1.	Состояние вопроса. Базовые математические модели.	6	2		2	4	2
2.	Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.	8	2		2	4	4
3.	Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.	18	4		4	8	10
4.	Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.	18	4		4	8	10
5.	Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.	20	4		4	8	12
6.	Контроль самостоятельной работы (КСР)	2				2	
7.	Промежуточная аттестация – экзамен	36					
8.	Итого	108	16		16	32	38

<sup>1</sup> Самостоятельная работа обучающегося.

<sup>2</sup> Занятия лекционного типа.

<sup>3</sup> Занятия семинарского типа.

<sup>4</sup> Занятия лабораторного типа.

Практические занятия (лабораторные занятия) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

На проведение практических занятий (лабораторных занятий) в форме практической подготовки отводится 16 часов.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений.
- компетенций - УК-2; ПК-11; ПК-12.

Текущий контроль успеваемости проходит в рамках занятий семинарского типа.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий), контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к экзамену.

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		Знания	Умения	Навыки
<b>плохо</b>	<b>не зачтено</b>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа
<b>неудовлетворительно</b>		Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
<b>удовлетворительно</b>	<b>зачтено</b>	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
<b>хорошо</b>		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.
<b>очень хорошо</b>		Уровень знаний в	Продemonстрированы	Продemonстрированы

Шкала оценивания сформированности компетенций	Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
	Знания	Умения	Навыки
	объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
<b>отлично</b>	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
<b>превосходно</b>	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
незачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы к экзамену

№	Вопрос	Код формируемой компетенции
---	--------	-----------------------------

№	Вопрос	Код формируемой компетенции
1.	Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.	ПК-5
2.	Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.	ПК-5
3.	Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.	ПК-5
4.	Интегральные операторы со слабой особенностью.	ПК-5
5.	Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.	ПК-5
6.	Спектральные свойства граничных интегральных операторов.	ПК-5
7.	Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.	ПК-5
8.	Граничные интегральные уравнения прямого подхода для уравнения Ламе.	ПК-5
9.	Согласованная и изопараметрическая гранично-элементные схемы.	ПК-5
10.	Переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Пространства основных и обобщенных функций.	ПК-5
11.	Построение фундаментального решения для дифференциальных уравнений и переход к интегральным уравнениям.	ПК-5
12.	Приближенные методы решения интегральных уравнений. Принцип сжатых отображений.	ПК-5
13.	Нахождение собственных чисел и функций интегральных операторов по методу Келлога.	ПК-5
14.	Нахождение собственных чисел и функций в случае вырожденных интегральных операторов.	ПК-5
15.	Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Операторы с конечной абсолютной нормой. Совпадение этих двух классов интегральных операторов. Теоремы о разложении ядра интегрального оператора в ряд.	ПК-5

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-5

Примеры задач

Рассмотрите алгоритм решения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]$$

с вырожденным ядром  $K(x, s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \varphi_i(s)$ ,

где  $\psi_i(x)$ ,  $\varphi_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  - системы линейно независимых функций.

Методом Галеркина найти два собственных значения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 k(x, s) y(s) ds = 0$$

$$k(x, s) = \begin{cases} s, & s \leq x, \\ x, & s > x. \end{cases}$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

9. Игумнов Л.А., Баженов В.Г. Метод граничных элементов в трехмерной динамической теории упругости и вязкоупругости с сопряженными полями: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2007. 328 с. (70 экз.)
10. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2009. 180 с. (20экз.)
11. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с. [http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov\\_BoundaryIntegralEquations.pdf](http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf)
12. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций и его приложения: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 55 с. (20экз.)
13. Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничного элемента в трехмерных задачах математической физики: Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике». Н.Новгород: Нижегородский университет. 2007. 100 с. <http://www.unn.ru/pages/issues/aids/2007/45.pdf>
14. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с. [http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov\\_LaplaceTransform.pdf](http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf)
15. Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf>
16. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf>
17. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf>
18. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf>

### б) дополнительная литература:

1. Бенерджи П., Баттерфильд Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494с.
2. <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=62814&idb=0>
3. Бреббия к., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524с (3 экз.)
4. Методы граничных элементов в механике твердого тела / пер. с англ. М. А. Тлеужанова ; под ред. А. М. Линькова. - М. : Мир, 1987. - 328 с. <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=78194&idb=0>

5. Партон В.В., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=78212&idb=0>
6. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань: КГУ. 1986. - 296с. (28 экз.) <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=81651&idb=0>
7. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус, 2001.-508 с. <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=45439&idb=0>
8. Верюжский Ю.В. Метод потенциала в статических задачах строительной механики. - М.: Наука, 1981. (20 экз.)
9. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к задачам математической физики. - М. - Л.: Гостехиздат, 1953  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
10. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=93638&idb=0>
11. Сб.: Метод граничных интегральных уравнений. - М.: Мир, 1978.
12. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто Н.В. Интегральные уравнения в теории упругости. - Спб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 1994. 272с. <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=239647&idb=0>

**в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы  
(в соответствии с содержанием дисциплины)**

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm>

**7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Автор(ы) д.ф.-м.н., профессор  
Игумнов Л.А.

Заведующий кафедрой  
теоретической,  
компьютерной и  
экспериментальной  
механики

д.ф.-м.н., профессор Игумнов Л.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30.11.2022 года, протокол № 3.