

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Метод конечных элементов в механике деформируемого твёрдого тела

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.01.01 Метод конечных элементов в механике деформируемого твёрдого тела относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства | |
|--|---|---|------------------------------------|-------------------------------|
| | Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора) | Результаты обучения по дисциплине | Для текущего контроля успеваемости | Для промежуточной аттестации |
| ПК-4: Способен применять методы математического и компьютерного исследования при анализе задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук | <p>ПК-4.1: Знает фундаментальные и теоретические основы, необходимые для исследования научных проблем</p> <p>ПК-4.2: Умеет самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определять цели и задачи исследования, а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы</p> <p>ПК-4.3: Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой</p> | <p>ПК-4.1: Знать вариационные постановки статических и динамических задач строительной механики и алгоритмы их решения методом конечных элементов.</p> <p>ПК-4.2: Уметь осуществлять анализ и выбор формулировок и методов решения статических и динамических задач.</p> <p>ПК-4.3: Владеть опытом решения задач строительной механики методом конечных элементов с использованием современных программных комплексов</p> | Задания | Зачёт: Контрольные вопросы |

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

| | |
|---|-------|
| | очная |
| Общая трудоемкость, з.е. | 3 |
| Часов по учебному плану | 108 |
| в том числе | |
| аудиторные занятия (контактная работа): | |

| | |
|--|------------|
| - занятия лекционного типа | 32 |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | 48 |
| - КСР | 1 |
| самостоятельная работа | 27 |
| Промежуточная аттестация | 0 Зачёт |

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины | Всего (часы) | в том числе | | | |
|---|--------------|--|--|-------|---|
| | | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них | | | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
| | | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы | Всего | |
| Ф | Ф | Ф | Ф | Ф | |
| Введение | 5 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| Постановка задач и основные уравнения теории упругости. Предварительные сведения о МКЭ. | 11 | 4 | 5 | 9 | 2 |
| Формулировка МКЭ на основе принципа стационарности потенциальной энергии. Другие варианты формулировки МКЭ для решения задач теории упругости. | 13 | 4 | 6 | 10 | 3 |
| Построение разрешающей системы алгебраических уравнений. | 9 | 2 | 4 | 6 | 3 |
| Построение координатных функций в обобщенных координатах. Специальные системы координат. Лагранжево семейство элементов. Сирендипово семейство элементов. | 13 | 4 | 6 | 10 | 3 |
| Эрмитовы элементы. Треугольные элементы. | 13 | 4 | 6 | 10 | 3 |
| Применение изопараметрических элементов. Численное интегрирование в МКЭ. | 13 | 4 | 6 | 10 | 3 |
| Вопросы точности и сходимости в МКЭ. Основные понятия. Условия полноты координатных функций в МКЭ. Условия непрерывности функций. | 13 | 4 | 6 | 10 | 3 |
| Некоторые оценки устойчивости решений в МКЭ | 9 | 2 | 4 | 6 | 3 |
| Вычисление напряжений в МКЭ. Структура КЭ вычислительных комплексов. | 8 | 2 | 3 | 5 | 3 |
| Аттестация | 0 | | | | |
| КСР | 1 | | | 1 | |
| Итого | 108 | 32 | 48 | 81 | 27 |

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение

2. Постановка задач и основные уравнения теории упругости. Предварительные сведения о МКЭ.

3. Формулировка МКЭ на основе принципа стационарности потенциальной энергии. Другие варианты формулировки МКЭ для решения задач теории упругости.
4. Построение разрешающей системы алгебраических уравнений.
5. Построение координатных функций в обобщенных координатах. Специальные системы координат. Лагранжево семейство элементов. Сирендипово семейство элементов.
6. Эрмитовы элементы. Треугольные элементы.
7. Применение изопараметрических элементов. Численное интегрирование в МКЭ.
8. Вопросы точности и сходимости в МКЭ. Основные понятия. Условия полноты координатных функций в МКЭ. Условия непрерывности функций.
9. Некоторые оценки устойчивости решений в МКЭ
10. Вычисление напряжений в МКЭ. Структура КЭ вычислительных комплексов.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Задание 1

Записать полную систему соотношений для применения МКЭ для одномерного случая (растяжение стержня)

Задание 2

Записать полную систему соотношений для применения МКЭ для случая плоской деформации

Задание 3

Записать полную систему соотношений для применения МКЭ для случая плоского напряжения

Задание 4

Определить, являются ли приведенные системы функций линейно независимыми.

Задание 5

Вычислить размерность матрицы жесткости для приведенных КЭ.

Задание 6

Построить матрицу инцидентности для приведенной сетки КЭ.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

| Оценка | Критерии оценивания |
|------------|---|
| зачтено | Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя |
| не зачтено | Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя |

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
|--|---|--|--|--|--|---|--|
| | не зачтено | | | зачтено | | | |
| <u>Знания</u> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными недочетами и, | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |

| | | | | | | | |
|---------------|--|---|---|---|--|--|---|
| | | | | с недочетами | | выполнены все задания в полном объеме | |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка | | Уровень подготовки |
|------------|----------------------------|--|
| зачтено | превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
| | отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично». |
| | очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо» |
| | хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо». |
| | удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». |
| | плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Формулировки задач механики: диф. уравнения, вариационные формулировки, динамика, статика. Постановка задачи теории упругости: группы уравнений. Понятие функционала.
2. Принцип стационарности полной потенциальной энергии.
3. Виртуальные перемещения и принцип возможной работы.
4. Принцип стационарности дополнительной энергии.

5. Принцип дополнительной возможной работы.
6. Постановка задачи теории упругости в матричной форме.
7. Метод Ритца. Требования к координатным функциям.
8. Метод конечных элементов.
9. Требования к координатным функциям в МКЭ. Понятие функции формы.
10. Формулировка МКЭ на основе принципа стационарности потенциальной энергии.
11. Узловые перемещения и силы, матрица жесткости КЭ.
12. Механический смысл матрицы жесткости КЭ. Понятие степени свободы.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

| Оценка | Критерии оценивания |
|------------|---|
| зачтено | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок |
| не зачтено | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки |

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Капустин Сергей Аркадьевич. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. - 180 с. - ISBN 5-85746-574-5 : 100.00., 40 экз.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике : пер. с англ. / под ред. Б. Е. Победри. - М. : Мир, 1975. - 541 с. : ил. - 2.70., 2 экз.
3. Стренг Гилберт. Теория метода конечных элементов / пер. с англ. В. И. Агошкова [и др.] ; под ред. Г. И. Марчука. - М. : Мир, 1977. - 349 с. : ил. - 1.73., 5 экз.

Дополнительная литература:

1. Зенкевич Ольгерд. Конечные элементы и аппроксимация / пер. с англ. Б. И. Квасова ; под ред. Н. С. Бахвалова. - М. : Мир, 1986. - 318 с. : ил. - 1.70., 1 экз.
2. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / пер. с англ. Г. В. Демидова, А. Л. Урванцева ; под ред. Г. И. Марчука. - М. : Мир, 1981. - 304 с. : ил. - 1.40., 4 экз.
3. Галлагер Ричард. Метод конечных элементов : основы / пер. с англ. В. М. Картвелишвили ; под ред. Н. В. Баничука. - М. : Мир, 1984. - 428 с. : ил. - 2.40., 3 экз.
4. Образцов Иван Филиппович. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов : учеб. пособие для студентов авиац. специальностей вузов. - М. : Высшая школа, 1985. - 391 с. - 1.10., 1 экз.
5. Васидзу Кюнтиро. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / пер. с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна ; под ред. Н. В. Баничука. - М. : Мир, 1987. - 542 с. : ил. - 50.00., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zenkevich1975ru.djvu>
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/StrengeFiks1977ru.djvu>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.