

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**федеральное государственное автономное**  
**образовательное учреждение высшего образования**  
**«Национальный исследовательский**  
**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
решением ученого совета ННГУ  
протокол от "30" ноября 2022 г. №13

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Уровень высшего образования  
**Подготовка научных и научно-педагогических кадров**

Программа аспирантуры  
**Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Научная специальность  
**1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Форма обучения  
**Очная**

Нижний Новгород  
2023 год

### 1. Место и цель дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения и математическая физика» относится к числу обязательных, дисциплин образовательного компонента программы аспирантуры и изучается на 3 году обучения в 6 семестре.

**Цель дисциплины** – изучение теории дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, теории оптимального управления и вариационного исчисления, краевых и начально-краевых задач математической физики. Одна из целей изучения данной дисциплины состоит в подготовке к сдаче кандидатского экзамена по специальности 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика.

### 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Выпускник, освоивший программу, должен

**Знать:**

- свойства решений дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных,
- методы построения решений некоторых типов дифференциальных уравнений,
- методы и приемы качественного исследования динамических систем,
- элементы вариационного исчисления и оптимального управления

**Уметь:**

- проводить доказательства основных утверждений на высоком теоретическом уровне

**Владеть:**

- навыками критического анализа современных передовых публикаций по специальности

### 3. Структура и содержание дисциплины.

Объем дисциплины (модуля) составляет 1 з.е., всего – 36 часов, из которых 28 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа - 16 часов, 12 часов составляют занятия семинарского типа).

**Таблица 2**

**Структура дисциплины**

Наименование раздела дисциплины	Всего, часов	В том числе					
		Контактная работа, часов					Самостоятельная работа обучающегося, часов
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации	Всего	
Обыкновенные дифференциальные уравнения	9	4	3				
Дифференциальные уравнения в частных производных	9	4	3				
Качественная теория дифференциальных уравнений	9	4	3				
Вариационное исчисление и оптимальное управление	9	4	3				
Промежуточная аттестация в 6 семестре: – экзамен							
Итого	36	16	12				8

Таблица 3

## Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Форма проведения занятия	Форма текущего контроля*
1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	<p>1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.</p> <p>2. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решений.</p> <p>3. Общая теория линейных уравнений и систем (глобальность существования решения, существование фундаментальной матрицы, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).</p> <p>4. Автономные нелинейные системы ОДУ. Положения равновесия, их классификация. Предельные циклы.</p> <p>5. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.</p> <p>6. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.</p> <p>7. Задача Штурма—Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.</p> <p>8. Первые интегралы. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона—Якоби.</p>	лекции, занятия семинарского типа	Собеседование
2.	Дифференциальные уравнения в частных производных	<p>1. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши—Ковалевской.</p> <p>2. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.</p> <p>3. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)</p> <p>4. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)</p> <p>5. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость</p>	лекции, занятия семинарского типа	Собеседование

		<p>распространения, функция источника и др.).</p> <p>6. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.</p> <p>7. Пространства Соболева <math>W^p_m</math>. Теоремы вложения, следы функций из <math>W^p_m</math> на границе области.</p> <p>8. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.</p>		
3.	Качественная теория дифференциальных уравнений	<p>1. Понятие дискретной и непрерывной динамической системы (поток и каскады). Фазовое пространство. Понятия неблуждающего (блуждающего) множества, <math>\Omega</math>- (A) предельного множества динамической системы и их свойства. Определение топологической эквивалентности потоков и сопряженности каскадов.</p> <p>2. Понятие грубой и структурной устойчивой динамической системы, определенной в ограниченной части плоскости. Аналитические условия грубости (гиперболичности) состояний равновесия и замкнутых траекторий динамической системы на плоскости.</p> <p>3. Понятие о схеме потока на плоскости с конечным числом особых траекторий. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности двух грубых потоков на плоскости.</p> <p>4. Локальные бифуркации динамических систем: а) бифуркации состояний равновесия в однопараметрических семействах общего положения; б) бифуркации неподвижных точек в однопараметрических семействах одномерных отображений; в) бифуркация рождения инвариантного тора в случае отсутствия сильных резонансов.</p> <p>5. Основные глобальные бифуркации динамических систем на плоскости: а) бифуркация гомоклинической петли седла, теорема Андронова-Леонтович; б) бифуркация гомоклинической петли седло-узла.</p>	лекции, занятия семинарского типа	Собеседование
4	Вариационное исчисление и оптимальное управление	<p>1. Постановка задач оптимального управления. Связь с задачами вариационного исчисления.</p> <p>2. Необходимые условия оптимальности в задачах Майера и Лагранжа. Функция Гамильтона. Условия трансверсальности.</p> <p>3. Необходимые условия оптимальности в общей задаче. Метод множителей Лагранжа.</p> <p>4. Линейно-квадратичная задача. Оптимальное управление в форме</p>	лекции, занятия семинарского типа	Собеседование

		обратной связи по состоянию системы. Матричное уравнение Риккати. 5. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстрогодействия для линейных систем. 6. Задачи оптимального быстрогодействия. Синтез оптимального управления. 7. Построения оптимальных траекторий на фазовой плоскости. Кривые переключения управлений. 8. Теорема Фельдбаума о числе переключений. Условие общности положения. Управляемость линейных систем. 9. Принцип оптимальности Беллмана. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана.		
--	--	--	--	--

#### **4. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся**

*Самостоятельная работа обучающегося состоит в изучении конспектов лекций и основной литературы из списка для подготовки к кандидатскому экзамену по специальности. Вопросы для самоконтроля совпадают с экзаменационными вопросами.*

#### **5. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине**

##### ***5.1. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.***

При выполнении всех работ учитываются следующие **основные критерии**:

- уровень теоретических знаний (подразумевается не только формальное воспроизведение информации, но и понимание предмета, которое подтверждается правильными ответами на дополнительные, уточняющие вопросы, заданные членами комиссии);
- умение использовать теоретические знания при анализе конкретных проблем, ситуаций;
- качество изложения материала, то есть обоснованность, четкость, логичность ответа, а также его полнота (то есть содержательность, не исключающая сжатости);
- способность устанавливать внутри- и межпредметные связи,
- оригинальность мышления, знакомство с дополнительной литературой и другие факторы.

##### ***Описание шкалы оценивания на промежуточной аттестации в форме экзамена***

Оценка *отлично* – исчерпывающее владение программным материалом, понимание сущности рассматриваемых процессов и явлений, твердое знание основных положений дисциплины, умение применять концептуальный аппарат при анализе актуальных проблем. Логически последовательные, содержательные, конкретные ответы на все вопросы.

Оценка *хорошо* – достаточно полные знания программного материала, правильное понимание сути вопросов, знание определений, умение формулировать тезисы и аргументы. Ответы последовательные и в целом правильные, хотя допускаются

неточности, поверхностное знакомство с отдельными теориями и фактами, достаточно формальное отношение к рекомендованным для подготовки материалам.

Оценка *удовлетворительно* – фрагментарные знания, расплывчатые представления о предмете. Ответ содержит как правильные утверждения, так и ошибки, возможно, грубые. Испытуемый плохо ориентируется в учебном материале, не может устранить неточности в своем ответе даже после наводящих вопросов.

Оценка *неудовлетворительно* – отсутствие ответа хотя бы на один из основных вопросов, либо грубые ошибки в ответах, полное непонимание смысла проблем, не достаточно полное владение терминологией.

## ***5.2. Примеры типовых контрольных заданий или иных материалов, используемых для оценивания результатов обучения по дисциплине***

Вопросы для экзамена (кандидатского)

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Общая теория линейных уравнений и систем (глобальность существования решения, существование фундаментальной матрицы, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).
3. Автономные нелинейные системы ОДУ. Положения равновесия, их классификация. Предельные циклы.
4. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
5. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.
6. Задача Штурма—Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
9. Первые интегралы. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона—Якоби.
10. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши—Ковалевской.
11. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.
12. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)
13. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)
14. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.)
15. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.
16. Понятие дискретной и непрерывной динамической системы (поток и каскады). Фазовое пространство. Понятия неблуждающего (блуждающего) множества,  $\Omega$ - (A) предельного множества динамической системы и их свойства.
17. Понятие грубой и структурной устойчивой динамической системы, определенной в ограниченной части плоскости. Аналитические условия грубости (гиперболичности) состояний равновесия и замкнутых траекторий динамической системы на плоскости.
18. Грубые состояния равновесия и периодические траектории многомерных динамических систем. Примеры.

19. Условия грубости динамической системы на плоскости. Понятие о бифуркации динамической системы.
20. Локальные бифуркации динамических систем: а) бифуркации состояний равновесия в однопараметрических семействах общего положения; б) бифуркации неподвижных точек в однопараметрических семействах одномерных отображений; в) бифуркация рождения инвариантного тора в случае отсутствия сильных резонансов.
21. Основные глобальные бифуркации динамических систем на плоскости: а) бифуркация гомоклинической петли седла, теорема Андронова-Леонтович; б) бифуркация гомоклинической петли седло-узла.
22. Необходимые условия оптимальности в задачах Майера и Лагранжа. Функция Гамильтона. Условия трансверсальности.
23. Необходимые условия оптимальности в общей задаче. Метод множителей Лагранжа.
24. Линейно-квадратичная задача. Оптимальное управление в форме обратной связи по состоянию системы. Матричное уравнение Риккати.
25. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстрогодействия для линейных систем.
26. Задачи оптимального быстрогодействия. Синтез оптимального управления. Построения оптимальных траекторий на фазовой плоскости. Кривые переключения управлений.
27. Теорема Фельдбаума о числе переключений. Условие общности положения.
28. Управляемость линейных систем.
29. Принцип оптимальности Беллмана. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана.

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.**

а) основная литература

1. Понтрягин Л. С. - Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. для студентов мат. специальностей ун-тов. - М. : Наука, 1982. - 331 с  
<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=0&IdField=137309231&DB=1> 186 экз.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука,  
<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=0&IdField=137223707&DB=1> 1971 1 экз. 1975 4 экз.
3. Федорюк М. В. - Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1980. - 350 с.  
<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=6&IdField=3539156&DB=1> 2 экз.
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Физматлит, 1985. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=91467&DB=1> 4 экз.
5. Владимиров В. С. , Жаринов В. В. - Уравнения математической физики: учеб. для студентов вузов. - М.: Физматлит, 2008. - 400 с.  
<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=0&IdField=137240724&DB=1> 10 экз.
7. Михайлов В. П. - Дифференциальные уравнения в частных производных: [учеб. пособие для мех.-мат. и физ. специальностей вузов]. - М.: Наука, 1983. - 424 с.  
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=93548&DB=1> 4 экз.
8. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1963.
9. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
10. Каток А.Б., Хасселблатт Б. Введение в современную теорию динамических систем. Изд-во «Факториал», 1999.
11. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 428 с.

б) дополнительная литература:

1. Петровский И. Г. - Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Физматлит, 404 с.  
<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=0&IdField=137306478&DB=1> 1 экз, 2009 г.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. - Уравнения математической физики: [учеб. пособие для ун-тов]. - М.: Наука, 1972. - 735 с.  
<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=0&IdField=137329901&DB=1> 7 экз.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics.htm>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;
  - материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование;
  - лицензионное программное обеспечение: *Windows, Microsoft Office*;
  - обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.
- ресурсам.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 № 2122), Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Приказ Минобрнауки РФ от 20.10.2021 № 951).

Авторы:

Авторы: профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Баландин Д.В.

Рецензент(ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании методической комиссии Института информационных технологий, математики и механики от 01.12.2021 №2.