

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования**
**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.
Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
Президиумом ученого совета ННГУ

протокол
от

"14" декабря 2021 г. № 4

Рабочая программа дисциплины

Практикум по математическому анализу

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

020302 Фундаментальная информатика и информационные технологии

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Инженерия программного обеспечения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2022 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.025 «Практикум по математическому анализу» относится к обязательной части ООП направления подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2: Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты	<p>Уметь</p> <ol style="list-style-type: none"> Находить грани множеств. Вычислять пределы числовых последовательностей и функций, связанные с неопределенностями $0 \cdot \infty$, $0' \cdot \infty'$, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^∞ Находить производные и дифференциалы высших порядков, уравнение касательной к графику функции в точке. Проводить полное исследование функции и на основании данного исследования строить эскизы графиков функций заданных явно и параметрически. Интегрировать простейшие дроби, выражения, рационально зависящие от тригонометрических функций, дифференциальный бином. Применять определенный интеграл для решения задач, связанных с определением длины дуги и спрямляемой кривой, площади плоской фигуры, площади поверхности вращения. Находить кратные и повторные пределы функции. Исследовать непрерывность функции по совокупности переменных и по отдельным переменным. Находить касательную плоскость и 	задачи

		<p>нормаль к поверхности.</p> <p>10. Вычислять старшие производные неявных функций.</p> <p>11. Находить локальный, глобальный экстремум функции на множестве, условный экстремум функции.</p> <p>11. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков Даламбера, Коши, Раабе. Интегральный признак сходимости.</p> <p>12. Исследовать сходимость знакопередающихся рядов с помощью признака Лейбница</p> <p>13. Применять признаки Абеля и Дирихле для исследования сходимости произвольных рядов.</p> <p>14. Исследовать сходимость функциональных рядов на равномерность с помощью критерия Коши равномерной сходимости и достаточных признаков Вейерштрасса, Абеля, Дирихле.</p> <p>15. Находить область и радиус сходимости степенного ряда с использованием формул Даламбера, Коши и Коши-Адамара.</p> <p>16. Исследовать несобственные интегралы 1 и 2 рода на сходимость, а интегралы, зависящие от параметров, на сходимость и равномерную сходимость.</p> <p>17. Применять Эйлеровы интегралы к вычислению некоторых определенных и несобственных интегралов.</p> <p>18. Раскладывать периодическую и произвольную функцию, определенную на отрезке, в тригонометрический ряд Фурье и выяснять характер сходимости полученного ряда.</p>	
--	--	---	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
контактная работа:	98
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа	96
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	46
Промежуточная аттестация – зачет	0
В том числе:	
1 семестр	
Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
Часов по учебному плану	72
в том числе	
контактная работа:	49
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа	48
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация – зачет	0
2 семестр	
Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
Часов по учебному плану	72
в том числе	
контактная работа:	49
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа	48
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация – зачет, экзамен	0

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа обучающегося часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				
		из них				
1 семестр		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Введение. Предмет математического анализа. Очерк истории развития математического анализа. Математическая символика, обозначения.	0	0			0	
2. Основные понятия и обозначения Числовая прямая. Числовые множества: промежутки, интервалы, лучи. Окрестность точки. Ограниченные и неограниченные множества, грани множества. Существование точных граней ограниченных числовых множеств.	5	0	2		2	3
3. Числовые последовательности. Определение числовой последовательности. Сходимость и предел числовой последовательности. Свойства пределов и числовых последовательностей. Теорема о единственности предела, теорема об ограниченности сходящейся последовательности, предельный переход в неравенствах, арифметические действия со сходящимися последовательностями. Бесконечно малые и большие последовательности, связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей. Предел монотонной последовательности. Число e. Принцип вложенных отрезков. Подпоследовательности. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Предельные точки числового множества. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши существования предела. Полнота числовой прямой.	11	0	7		7	4
4. Предел функции: Функции действительного переменного. Область определения, множество значений. Равенство функций. График функции. Определение предела функции в точке по Гейне и Коши. Теорема эквивалентности определений. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Свойства пределов функций. Предел суперпозиции. Первый и второй замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей. Односторонние пределы и их связь с двухсторонними пределами. Обобщение понятия предела: бесконечно большие функции, пределы на бесконечности. Критерий Коши существования конечного предела функции в точке и на бесконечности.	14	0	10		10	4
5. Непрерывные функции: Различные определения непрерывности функции в точке. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Следствия второго замечательного предела. Свойства непрерывных функций. Локальная устойчивость знака. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность функции на множестве. Непрерывность элементарных функций. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении точных граней. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Условия непрерывности монотонной функции на отрезке. Теорема о непрерывности обратной функции. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые величины и их применение при	14	0	10		10	4

вычислении пределов.						
6. Производная функции: Задачи, приводящие к понятию производной функции. Средняя и мгновенная скорость изменения процесса. Производная и дифференциал функции в точке. Дифференцируемость функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная к графику функции в точке. Свойства производных и дифференциалов функций. Производная суперпозиции и обратной функции. Таблица производных. Дифференцируемость элементарных функций. Функции и кривые на плоскости, заданные параметрически. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Понятие кривой в пространстве. Параметризация кривой. Эквивалентность параметризаций. Гладкие и кусочно-гладкие кривые. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой, заданной параметрически. Инвариантность формы первого дифференциала. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям значений функции. Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. Формула Лейбница. Неинвариантность формы дифференциалов высшего порядка.	14	0	10		10	4
7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения: Локальный экстремум функции. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем. Формула конечных приращений. Локальная формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано. Представление основных элементарных функций по формуле Тейлора - Маклорена. Глобальная формула Тейлора на отрезке. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора и его оценка. Применение формулы Тейлора при вычислениях функций на отрезке. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей. Критерий монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума. Направления выпуклости, вогнутости функции. Точки перегиба. Достаточное условие перегиба. Асимптоты функции. Общая схема исследования и построения графиков функции. Нахождение глобального экстремума функции. Приближенные методы нахождения корней уравнений. Метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательной, оценка погрешности.	13	0	9		9	4
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация - экзамен	0					
Итого	72	0	48		49	23
Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, 2 семестр	Всего (часы)	Занятия лекционн ого типа	Занятия семинарск ого типа	Занятия лабораторн ого типа	Всего контак тны х часов	
1. Неопределенный интеграл: Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства интеграла. Таблица интегралов. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.						

<p>Рациональные и дробно-рациональные функции. Разложение правильной дробно-рациональной функции в сумму простейших дробей. Интегрирование простейших дробей. Метод неопределенных коэффициентов.</p> <p>Рационализация подинтегральной функции. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций.</p> <p>Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Теорема Чебышева.</p>	9	0	7		7	2
<p>2. Определенный интеграл: (Интеграл Римана)</p> <p>Задачи о площади подграфика функции, о работе переменной силы, о массе неоднородного стержня. Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл. Интегрируемость функции по Риману.</p> <p>Суммы Дабру и их свойства. Критерий интегрируемости. Колебание функции на отрезке.</p> <p>Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора. Классы интегрируемых функций.</p> <p>Свойства определенного интеграла и интегрируемых функций. Теоремы о среднем. 9.5. Интеграл как функция верхнего предела. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.</p>	10	0	7		7	3
<p>3. Приложения определенного интеграла</p> <p>Определение длины дуги и спрямляемой кривой. Вычисление длины дуги кривой в различных координатах. Дифференциал дуги кривой.</p> <p>Определение площади плоской фигуры. Критерий квадратуемости области. Квадатуемость области со спрямляемой границей. Вычисление площади плоских фигур.</p> <p>Объем тела. Критерий кубируемости тела. Вычисление объема тела с известными сечениями, и тела вращения.</p> <p>Площадь поверхности вращения.</p>	10	0	7		7	3
<p>4. Функции многих переменных и пределы:</p> <p>Арифметическое Евклидово пространство. Шаровая и кубическая окрестности точки.</p> <p>Последовательность в R^n. Сходимость и предел последовательности. Покоординатная сходимость. Критерий Коши сходимости последовательности в R^n.</p> <p>Ограниченные и неограниченные множества в R^n. Теорема Больцано-Вейерштрасса.</p> <p>Открытые и замкнутые множества. Компакты. Критерий компактности.</p> <p>Функции многих переменных. График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.</p> <p>Кратные и повторные пределы функции. Свойства</p>	9	0	6		6	3

пределов. Критерий Коши.						
5. Непрерывные функции многих переменных: Различные определения непрерывности функции в точке. Непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным. Свойства непрерывных функций. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве. Свойства функции, непрерывной на компакте: теорема Вейерштрасса об ограниченности и существовании глобальных экстремумов, теорема Кантора о равномерной непрерывности.	9	0	6		6	3
6. Дифференцирование функции многих переменных: Частные производные. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции. Достаточное условие дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Практические следствия инвариантности. Производная функции по направлению. Градиент функции Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы высших дифференциалов. Формула Тейлора. Оценка остаточного члена и приближенное вычисление функции с помощью формулы Тейлора. Формула Лагранжа конечных приращений.	10	0	7		7	3
7. неявно-заданные функции: Неявно-заданные функции и система неявных функций, одной и многих переменных. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости. Якобиан системы функции. Вычисление производных неявных функций. Уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно.	8	0	5		5	3
8. Экстремумы функций многих переменных Необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа. Глобальные экстремумы функций (безусловные и условные).	6	0	3		3	3
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация - экзамен	0					
Итого	72	0	48		49	23

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Виды самостоятельной работы студентов:

Выполнение домашних практических заданий

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	обучающего от ответа						
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающего от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающего от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция

		сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1 Вариант 1.

- Доказать по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2}$.
- Найти пределы последовательностей a_n , обосновывая свои действия:

$$(a) \quad a_n = \frac{(n+1)^5 + (n-1)^5 - (2n+3)^5}{n^2 + (4-n)^5};$$

$$(b) \quad a_n = \frac{n \sqrt[3]{6n} - \sqrt[4]{81n^6 - 1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}};$$

$$(c) \quad a_n = \sqrt{n^6 + 8(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 + 1})};$$

$$(d) \quad a_n = \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{4^n - 2^n}}.$$

- Пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.
- Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

- КУДРЯВЦЕВ Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник. - 3-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 400 с. (56 экз.)
- КУДРЯВЦЕВ Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 424 с. (58 экз.)
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учеб. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. СПб.: МИФРИЛ, 1995. - 489 с. (168 экз.)

б) дополнительная литература:

1. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Курс математического анализа. В 2-х томах. Наука, 1983. Т.1 464 с.; Т.2 448 с.
<https://e.lanbook.com/book/2270#authors>
2. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). - М.: Физматлит, 2003. т.1 - 680с.; т.2 - 864с.; т.3 - 728с.
<https://e.lanbook.com/book/409#authors>
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : [учеб. пособие для втузов]. - М.: Наука, 1967. - 368 с. (16 экз. + 15 экз. другие года издания)
4. Исследование дифференцируемых функций одной переменной. Практикум. Составители: Киселева Т.П., Лукьянов В.И., Потёмин Г.В. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 37с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ (№ 1018.15.08) <http://www.unn.ru/books/resources.html>
5. Графики функций: учебно-метод. пособие. Сост. Т.П.Киселева, И.И.Олюнина. - Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 43с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ (№ 979.15.08) http://www.unn.ru/books/met_files/GRAF.pdf

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)

1. Математический анализ (семестр 1). Электронно-управляемый курс. Кузенков О.А., Рябова Е.А., 2014. <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=243>
2. Математический анализ (семестр 2). Электронно-управляемый курс. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Киселева Т.П., 2014. <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=626>
3. Математический анализ (семестр 3). Электронно-управляемый курс. Кротов Н.В., 2014. <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=289>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Автор (ы) _____

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой _____