

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением ученого совета ННГУ  
протокол от  
«30» ноября 2022 г. № 13

## **Рабочая программа дисциплины**

### **Практикум по численным методам**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

**бакалавриат**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Прикладная математика и информатика (общий профиль)**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

**очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины: Б1.В.11 (Практикум по численным методам).

Осваивается в 6 семестре третьего года обучения. Зачет.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.11 «Практикум по численным методам» относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>ПК-5.</b> Способен проектировать программное обеспечение	<b>ПК-5.1.</b> Знает типовые решения, библиотеки программных модулей, шаблоны, классы объектов, используемые при разработке программного обеспечения	<b>Знает</b> постановки задач дисциплины «Практикум по численным методам», понятийный аппарат и утверждения, основные приемы и формулы, подходы к изучению аппроксимации, устойчивости, сходимости: – основы теории погрешности и теории приближения функций (интерполяция, поиск элементов наилучшего приближения); – методы численного дифференцирования и интегрирования; – методы решения задач линейной алгебры, условия сходимости итерационных процессов, итерационные методы решения нелинейных уравнений и систем; – методы численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем; – методы численного решения стационарных и нестационарных задач математической физики, включая нелинейные задачи. <b>Знает</b> постановки модельных задач дисциплины «Практикум по численным методам», их прикладное значение, этапы построения	Собеседование  практическое задание  проект

		численной модели и проведения численного эксперимента	
	<b>ПК-5.2.</b> Знает методы и средства проектирования программного обеспечения	<b>Знает:</b> методы и средства проектирования программного обеспечения	Собеседование  практическое задание  проект
	<b>ПК-5.4.</b> Умеет использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения	<b>Умеет:</b> использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения.  <b>Умеет:</b> использовать навыки алгоритмизации и реализации численных методов решения задач на ЭВМ, средства визуализации результатов расчетов и методы анализа результатов	Собеседование  практическое задание  проект
	<b>ПК-5.5.</b> Умеет применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных	<b>Умеет</b> применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных.  <b>Умеет:</b> проводить эксперимент по проверке корректной реализации алгоритмов, обосновать аппроксимацию, устойчивость, сходимость, исследовать эффективность численного метода;  формулировать постановки модельных задач;  исследовать корректность численной модели;  эффективность и сходимость метода, анализировать (оценивать) погрешность;  ставить цели численного исследования, разрабатывать программную реализацию;  проводить вычислительный эксперимент.	Собеседование  практическое задание  проект

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>Очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>2 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>

<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	<b>33</b>
- занятия лекционного типа	
- занятия семинарского типа	<b>16</b>
- занятия лабораторного типа	<b>16</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>зачет</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	

Семестр 6						
Тема 15. Анализ сходимости разностных схем, метод разделения переменных	5		2		2	3
Тема 16. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем	12		2	4	6	6
Тема 17. Методы обработки данных и приближения функций Метод наименьших квадратов Приближения в гильбертовых пространствах Наилучшие равномерные приближения, экономизация степенных рядов	10		2	2	4	6
Тема 18. Вариационно-проекционные методы решения краевых задач	14		6		6	8
Тема 19. Численное интегрирование	12		4	2	6	6
Анализ реализации итерационного метода на примере схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона (проект)	8			4	4	4
Решение нелинейных уравнений и систем. Решение нестационарных уравнений в частных производных (проект)	10			4	4	6
Текущий контроль (КСР)	1				1	

<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>						
Итого (6 семестр)	<b>72</b>		<b>16</b>	<b>16</b>	<b>33</b>	<b>39</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского и лабораторного типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Практикум по численным методам» включает:

- ❖ Выполнение домашних практических заданий (Практикум)
- ❖ Выполнение лабораторных работ (Лабораторный практикум)
- ❖ Выполнение исследовательских проектов (задания проектов представлены в разделах Практикума и Лабораторного практикума)
- ❖ Аудиторные контрольные работы
- ❖ Подготовку к собеседованию, зачету.

а также подготовку отчетов и презентаций для обсуждения результатов Практикума и Лабораторного практикума.

Содержание и порядок выполнения заданий, а также варианты заданий приведены в [4], [5].

#### **В составе Практикума**

##### **Семестр 6**

Практикум 1. Нестационарное уравнение теплопроводности. Анализ сходимости и погрешности

Практикум 2. Численное решение задачи Коши для ОДУ

Практикум 3. Численное решение задачи Коши для ОДУ (приложения, включая проект)

Практикум 4. Методы обработки данных и приближения функций

Практикум 5. Вариационно-проекционные методы решения краевых задач

Практикум 6. Численное интегрирование

#### **В составе Лабораторного практикума**

##### **Семестр 6**

Лабораторный практикум 1. Анализ реализации итерационного метода на примере схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона (включая проект)

Лабораторный практикум 2. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Лабораторный практикум 3. Решение нелинейных уравнений и систем. Решение нестационарных уравнений в частных производных (включая проект)

Лабораторный практикум 4. Методы обработки данных и приближения функций

Лабораторный практикум 5. Численное интегрирование (изучение свойств методов)

Для самоконтроля у студента имеется возможность удаленного тестирования по дистанционному лекционному курсу [4], [5] (<https://e-learning.unn.ru/course/enrol/index.php?id=827>, требуется регистрация).

Кроме рекомендованной в п. 6 литературы могут быть использованы источники:

1. Дробышев В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. М.: Наука, 1980. (21 экз).
2. Начало работы с основами MATLAB и Simulink. 1994-2018, MathWorks, Inc URL: [https://www.mathworks.com/support/learn-with-matlab-tutorials.html?s\\_tid=hp\\_learn\\_tutorials](https://www.mathworks.com/support/learn-with-matlab-tutorials.html?s_tid=hp_learn_tutorials)

Контрольные вопросы и типовые задания для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## **Методические указания к выполнению самостоятельной работы**

### **Цели и задачи курса**

*Цели и задачи* курса тесно связаны с тенденциями, проявляющими себя последние годы все более и более значимо. *Вычислительная техника нового поколения открывает новые возможности изучения сложных реальных объектов методами вычислительного эксперимента.* Такой эксперимент предполагает дискретизацию исходной (как правило, дифференциальной) задачи и требует специальной проработки численного алгоритма (корректность, устойчивость, точность, сходимость). Возрастает роль подготовки специалистов в области численных методов и программирования.

Цель дисциплины «Практикум по численным методам» – изучение фундаментальных принципов построения численных алгоритмов, подходов к анализу их свойств, подготовка студентов к разработке и применению эффективных вычислительных комплексов, необходимых для математического моделирования сложных систем.

Курс содержит изучение основ машинной арифметики, анализ структуры погрешности, подходы и методы приближенного вычисления функций, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения, решение нелинейных алгебраических уравнений и систем.

Особое внимание уделяется методам численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решению уравнений в частных производных, а также структуре соответствующих вычислительных комплексов.

При изучении модельных задач курса рассматриваются проблемы решения некорректно поставленных задач, задач большой размерности, необходимость комбинирования качественных и количественных методов исследования, перспективы параллельных алгоритмов.

Преподавание курса ориентировано на достижение следующих целей обучения:

- формирование научного мышления, понимания областей и перспектив применения численных методов;
- овладение методами численного анализа и вычислительного эксперимента;
- выработка навыков решения задач с использованием методов математического моделирования;
- формирования алгоритмического подхода к решению прикладных задач;
- освоение методов обработки экспериментальных данных;
- закрепление практических навыков работы с ЭВМ; навыков работы с современным программным обеспечением; навыков разработки и применения программных систем и комплексов.

## **Структура курса**

Курс «Практикум по численным методам» в институте ИТММ ННГУ подготовлен и реализован в соответствии с требованиями типовой программы по направлению «01.03.02 Прикладная математика и информатика», разработанной под руководством академика РАН А.А. Самарского<sup>1</sup>.

Курс имеет «уровневую» структуру. С одной стороны, в нем последовательно представлены все основные разделы численного анализа. С другой стороны, сложные приложения требуют одновременного использования разных методов. Поэтому основой курса является системное изучение *модельных задач*, описывающих свойства реальных объектов различной природы.

График изучения разделов курса таков, чтобы, изучая темы численного анализа, студенты могли в течение каждого семестра самостоятельно подготовить программную реализацию методов решения модельных задач.

При подготовке к зачету материал курса систематизируется как по классам задач, так и по классам методов.

## **Лабораторный практикум**

В соответствии с ОС ВО по направлению «01.03.02 Прикладная математика и информатика» в рамках курса ставится задача развития компетенций разработки и применения программных средств разного уровня сложности, необходимых для решения разных задач численного исследования. В их числе:

- ❖ программы для пробных расчетов, проверки возможностей методов;
- ❖ программные системы, поддерживающих широкий спектр экспериментальных возможностей для изучения свойств метода и свойств моделируемых объектов.

Основные требования к программам:

- ✓ программа должна быть написана студентом на алгоритмическом языке высокого уровня;
- ✓ код, реализующий численный метод, должен быть подготовлен студентом самостоятельно;
- ✓ программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но и для проверки корректной реализации метода; а также для численного изучения свойств исходного (моделируемого) объекта.

Часть заданий лабораторного практикума выполняются на программах-тренажерах.

## **Практикум к занятиям семинарского типа**

Практикум содержит разные типы задач. Если поручено **подготовить программу**, основное требование: код численного метода должен быть подготовлен студентом самостоятельно.

Требования к оформлению заданий:

- ❖ Постановки задач, формулы и выкладки, комментарии и выводы: рукописная форма обязательна.
- ❖ Результаты вычислительных экспериментов в формате презентации со скриншотами интерфейсов (протоколов) и сводными таблицами.

Для вычислений, **вспомогательных** по отношению к изучаемому методу, можно использовать **математический пакет**.

---

<sup>1</sup> Программы дисциплин по направлению «Прикладная математика и информатика». Учебно-методическое объединение Университетов. Учебно-методический совет по прикладной математике и информатике. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2002. С. 59-62.

### **Пример модельной задачи**

Одной из основных модельных задач курса является задача Дирихле для уравнения Пуассона (задача о прогибе нагруженной мембраны). Это полностью соответствует той значительной методической роли, которая отводится разбору различных методов решения этой задачи в учебной литературе (см., например, [Самарский А.А., Гулин А.В., 2000], [Марчук Г.И., 1980], [Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З., 1967] и др.).

Специфика численного решения такова: в ходе дискретизации задача сводится к решению системы линейных уравнений с разреженной матрицей, причем для отыскания решения целесообразно применять *итерационные методы линейной алгебры*.

Погрешность включает нескольких компонент: кроме вычислительной погрешности, имеются погрешность дискретизации и погрешность итерационного способа решения дискретной задачи. При выборе сеток, гарантирующих небольшую погрешность дискретизации, погрешность метода может возрасти, так как растут размерность системы, обусловленность и падает скорость сходимости итерационного метода.

В рамках Лабораторного практикума используется программный комплекс (тренажер) для анализа постановок задачи и методов численного решения. Целью лабораторных работ является подбор сеток и параметров итерационного метода, при которых исходная модельная задача будет решена с малой общей погрешностью.

Задание сначала выполняется на программе-тренажере, затем студент должен воспроизвести результаты эксперимента с помощью программы, подготовленной самостоятельно.

### **Самостоятельная исследовательская работа студентов (проект)**

В составе Практикума и Лабораторного практикума предусмотрены исследовательские проекты (см., например, п. 20-21 Содержания дисциплины). Проекты предполагают либо теоретическое исследование, либо направлены на построение вычислительного эксперимента и (или) программную реализацию метода.

Проекты как форма самостоятельной работы студента служат для оценки формирования компетенции ПК-5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>:

1. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 5. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 815E.14.08. URL: <https://e-learning.unn.ru/course/index.php?categoryid=24>. Вход требует авторизации.
2. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 6. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 831E.14.08. URL: <https://e-learning.unn.ru/course/index.php?categoryid=24>. Вход требует авторизации.

## **5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

### **5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине**

Уровень	Шкала оценивания сформированности компетенций
---------	---



сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможно оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие владения материалом. Невозможно оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»

	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы к зачету

Вопросы	Код формируемой компетенции
<p>1. Метод прогонки. Вычислительная устойчивость методов</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Запись СЛАУ с трехдиагональной матрицей</li> <li>❖ Вывод формул метода прогонки</li> <li>❖ Теоремы о применимости метода</li> <li>❖ Вычислительная устойчивость</li> <li>❖ Оценка трудоемкости</li> <li>❖ Примеры применения (задачи): <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ сплайн-интерполяция</li> <li>✓ краевые задачи для ОДУ</li> <li>✓ нестационарное уравнение теплопроводности</li> </ul> </li> <li>❖ Циклическая прогонка*. Матричная прогонка*</li> </ul>	ПК-5
<p>2. Основы теории интерполяции</p> <p>Сплайн-интерполяция</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Кубический сплайн, его свойства, канонический вид</li> <li>❖ Задача сплайн-интерполяции, выбор граничных условий</li> <li>❖ Теорема о существовании, единственности и способе построения интерполяционного кубического сплайна</li> <li>❖ Сходимость сплайн-интерполяции</li> <li>❖ Смысл кубических сплайнов, смысл ЕГУ</li> </ul>	ПК-5
<p>Интерполяция полиномами</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Интерполяционный полином, теорема о существовании, единственности и представлении в форме Лагранжа</li> </ul>	ПК-5

Вопросы	Код формируемой компетенции
<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Погрешность интерполяции (экстраполяции), вычислительная и общая погрешность, анализ общей погрешности (задача)</li> <li>❖ Теорема о погрешности интерполяции (экстраполяции)</li> <li>❖ Теоремы о сходимости (отсутствии сходимости)*</li> <li>❖ Таблицы разностей. Запись интерполяционного полинома в форме Ньютона и другие записи. Способы вычисления полинома*</li> <li>❖ Интерполяционный полином Эрмита*</li> <li>❖ Интерполяция тригонометрическими полиномами*</li> </ul>	
<p>3. Численное дифференцирование</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Формулы численного дифференцирования (ФЧД) интерполяционного типа. Пример: правый разностный оператор для вычисления первой производной на двухточечном шаблоне: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ способ построения, погрешность численного дифференцирования, порядок формулы, точность формулы, порядок погрешности, вычислительная и общая погрешность, анализ общей погрешности</li> <li>✓ оптимальный шаг численного дифференцирования</li> </ul> </li> <li>❖ Построение и анализ свойств ФЧД на примерах.</li> <li>❖ Построение ФЧД методом моментов (пример)</li> </ul>	ПК-5
<p>4. Методы решения краевых задач: интегрально-интерполяционный метод</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ <i>Модельная задача I</i> (стационарное уравнение теплопроводности с разрывными коэффициентами, первая краевая задача), построение разностной схемы интегрально-интерполяционным методом</li> <li>❖ Варианты записи коэффициентов схемы</li> <li>❖ Обоснование методов решения схемы</li> <li>❖ Анализ общей погрешности решения</li> </ul>	ПК-5
<p>5. Теория разностных схем. Пример анализа сходимости.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ <i>Модельная задача II</i> (стационарное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, первая краевая задача), анализ погрешности, погрешности аппроксимации, порядка аппроксимации, порядка сходимости, устойчивости схемы</li> <li>❖ Доказательство сходимости</li> <li>❖ Анализ общей погрешности решения</li> </ul>	ПК-5
<p>6. Консервативные разностные схемы</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Понятие о консервативных разностных схемах для решения уравнений математической физики</li> <li>❖ Теоремы о сходимости схем (формулировки)</li> <li>❖ Программы (тесты) для оценки вычислительной погрешности</li> <li>❖ Типовая и улучшенная аппроксимация ГУ для решения третьей и смешанной краевых задач* (оптимизация сходимости)</li> <li>❖ Примеры неконсервативных схем, отсутствие сходимости, дисбаланс схемы</li> </ul>	ПК-5
<p>7. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Выбор и реализация численного решения</p> <p>Постановка задачи, выбор схемы</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ <i>Модельная задача III</i> (задача Дирихле для уравнения Пуассона), построение</li> </ul>	ПК-5

Вопросы	Код формируемой компетенции
<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ разностной схемы</li> <li>❖ Запись схемы в матричном виде, блочная структура матрицы</li> <li>❖ Утверждения о свойствах матрицы</li> <li>❖ Утверждения о свойствах схемы (погрешность и погрешность аппроксимации, ее оценка, порядок, связь погрешностей), формулировка теоремы о сходимости</li> </ul>	
<p>Введение в итерационные методы линейной алгебры</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Итерационные методы решения СЛАУ, ходимость методов</li> <li>❖ Погрешность, невязка, точность метода на шаге</li> <li>❖ Критерии остановки метода</li> <li>❖ Оценка погрешности через невязку</li> <li>❖ Симметричные и положительно-определенные матрицы, их свойства, прием нормализации</li> <li>❖ Оценка спектра матрицы, теорема Гершгорина</li> <li>❖ Примеры итерационных методов, их реализации, теорем о сходимости: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ метод Якоби</li> <li>✓ метод Зейделя</li> <li>✓ метод верхней релаксации, оптимальный параметр метода</li> </ul> </li> </ul>	ПК-5
<p>Решение модельной задачи</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Обоснование применения методов (Зейдель, верхняя релаксация)</li> <li>❖ Реализация методов</li> <li>❖ Оценка погрешности решения СЛАУ</li> <li>❖ Анализ структуры общей погрешности, управление параметрами счета</li> </ul>	ПК-5
<p>8. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума. Анализ сходимости схемы и общей погрешности</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Шаблон узла, окрестность узла, граничные и внутренние узлы, типы внутренних узлов, связанные и несвязные сетки</li> <li>❖ Принцип максимума, доказательство. Существование и единственности решения схемы</li> <li>❖ Доказательство сходимости схемы</li> <li>❖ Постановки модельных задач (IV, V, VI) для других типов областей, обоснование возможных методов решения</li> </ul>	ПК-5
<p>9. Численное решение нестационарного уравнения теплопроводности</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ <i>Модельная задача VII</i> (нестационарное уравнение теплопроводности, первая краевая задача), явная и чисто неявная разностные схемы, схемы с весом, их свойства, способ решения разностных схем</li> </ul>	ПК-5
<p>10. Решение СЛАУ большой размерности: инструменты анализа сходимости</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Аксиомы векторных и матричных норм, согласованные (подчиненные) нормы, их свойства. Матричные нормы и собственные числа</li> <li>❖ Обусловленность линейных систем, числа обусловленности, их свойства, оценка погрешности решения возмущенных линейных систем</li> <li>❖ Механизм обусловленности, примеры</li> <li>❖ Скорость сходимости методов</li> <li>❖ Нормализация СЛАУ</li> </ul>	ПК-5
<p>11. Решение СЛАУ большой размерности: метод простой итерации, метод минимальных невязок</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Канонический вид одношаговых итерационных методов, их свойства</li> </ul>	ПК-5

Вопросы	Код формируемой компетенции
<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ (явные, неявные, стационарные и нестационарные методы)</li> <li>❖ Метод простой итерации <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ подбор параметра, анализ сходимости</li> <li>✓ метод с оптимальным параметром, анализ сходимости</li> </ul> </li> <li>❖ Метод минимальных невязок, подбор параметра, анализ сходимости</li> <li>❖ Сопоставление скорости сходимости</li> </ul>	
<p>12. Обоснование применения методов (примеры)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Построение методов на основе оценок границ спектра</li> <li>❖ Оценка погрешности решения СЛАУ на основе теорем о сходимости (на примере модельной задачи)</li> <li>❖ Методы решения проблемы собственных значений</li> </ul>	ПК-5
<p>13. Оптимизация сходимости: метод с чебышевским k-набором параметров</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Задача об отыскании полинома, наименее уклоняющегося от нуля (в классе полиномов заданной степени со старшим коэффициентом 1)</li> <li>❖ Задача об отыскании полинома, наименее уклоняющегося от нуля (в классе полиномов степени не выше заданной со свободным коэффициентом 1)</li> <li>❖ Методы с чебышевским k-набором параметров (<math>K \geq 1</math>) <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ построение методов</li> <li>✓ анализ сходимости</li> <li>✓ подбор параметров на основе оценок границ спектра</li> </ul> </li> </ul>	ПК-5
<p>14. Оптимизация сходимости: метод сопряженных градиентов</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Сведение задачи решения СЛАУ к задаче оптимизации</li> <li>❖ Свойства сопряженных направлений, решение задачи оптимизации на линейных многообразиях</li> <li>❖ Метод сопряженных градиентов, способ счета, свойства метода, сходимость</li> <li>❖ Сопоставление скорости сходимости методов</li> </ul>	ПК-5
<p>15. Анализ сходимости разностных схем, метод разделения переменных</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Модельная задача VII, явная разностная схема: задача на собственные числа и собственные функции, свойства собственных функций, пространство и базис для работы на слое</li> <li>❖ Первая вспомогательная задача для анализа устойчивости схемы, свойство вычислительной устойчивости</li> <li>❖ Вторая вспомогательная задача, теорема об устойчивости схемы по правой части и начальным условиям</li> <li>❖ Анализ погрешности аппроксимации, доказательство сходимости</li> <li>❖ Численное решение нелинейной задачи*</li> </ul>	ПК-5
<p>16. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Постановка задачи Коши для ОДУ, основные понятия. Одношаговые и многошаговые методы. Примеры явных одношаговых методов, их каноническая запись. Организация вычислений</li> <li>❖ Глобальная и локальная погрешность метода.</li> <li>❖ Порядок локальной погрешности и порядок метода</li> <li>❖ Контроль локальной погрешности <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ за счет двойного счета с половинным шагом</li> <li>✓ с помощью методов разных порядков</li> </ul> </li> </ul>	ПК-5

Вопросы	Код формируемой компетенции
<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Анализ локальной погрешности и порядка методов (примеры)</li> <li>❖ Обоснование оценки локальной погрешности за счет двойного счета с половинным шагом</li> <li>❖ Глобальная погрешность и порядок метода</li> <li>❖ Решение задачи Коши для жестких систем ОДУ. Понятие жесткой системы. Неявные методы типа Рунге-Кутты.</li> </ul>	
<p>17. Методы обработки данных и приближения функций</p> <p>Метод наименьших квадратов</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Принцип наименьших квадратов. Теорема о существовании, единственности и способах построения МНК-полиномов заданной степени. Нормальная система уравнений, истинные и предсказанные значения отклика, остатки</li> <li>❖ Выбор степени МНК-полинома, критерии качества решения</li> <li>❖ Приближения на основе обобщенных полиномов</li> </ul>	ПК-5
<p>Приближения в гильбертовых пространствах</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Элемент наилучшего приближения в конечномерном подпространстве гильбертова пространства. Теорема о существовании, единственности и способах его построения. Примеры.</li> </ul>	ПК-5
<p>Наилучшие равномерные приближения, экономизация степенных рядов</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Элемент наилучшего равномерного приближения функции в классе полиномов заданной степени. Теорема о чебышевском альтернансе</li> <li>❖ Задачи о построении полиномов, наименее уклоняющихся от нуля.</li> <li>❖ Экономизация степенных рядов, анализ погрешности</li> </ul>	ПК-5
<p>18. Вариационно-проекционные методы решения краевых задач</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Численное решение краевых задач на примере линейного ОДУ 2-го порядка с неоднородными граничными условиями: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ метод Бубнова-Галеркина, метод конечных элементов*</li> <li>✓ метод коллокации</li> <li>✓ МНК (интегрально и на системе точек)</li> <li>✓ метод Рунге*</li> </ul> </li> <li>❖ Численное решение краевых задач на примере задачи Дирихле* <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ метод конечных элементов</li> </ul> </li> <li>❖ Численное решение нелинейных краевых задач*</li> </ul>	ПК-5
<p>19. Численное интегрирование</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Квадратурные формулы (КВФ) интерполяционного типа: узлы, веса, погрешность, порядок, точность, порядок погрешности, вычислительная, общая погрешность</li> <li>❖ Построение формул методом моментов (примеры)</li> <li>❖ Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Формула Симпсона, анализ общей погрешности</li> <li>❖ Составная формула Симпсона, анализ общей погрешности и оценка погрешности интегрирования на основе производных и по правилу Рунге. Другие составные формулы</li> <li>❖ Метод адаптивной квадратуры, критерий останова счета, его обоснование</li> <li>❖ Квадратурные формулы наивысшей степени точности (Гаусса)*</li> <li>❖ Вычисление несобственных интегралов*</li> </ul>	ПК-5

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-5

Источник: Стронгина Н.Р. Практикум по курсу «Численные методы». Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 68 с. Ниже в тексте под Приложением 1 понимается приложение из этого источника.

#### ❖ Типовые практические задания для оценивания сформированности компетенции ПК-5, индикатор ПК-5.1

##### Примеры заданий в составе Практикума

##### Семестр 6

Практикум 1. Нестационарное уравнение теплопроводности. Анализ сходимости и погрешности

Практикум 2. Численное решение задачи Коши для ОДУ

Практикум 4. Методы обработки данных и приближения функций

И другие

#### ❖ Типовые практические задания для оценивания сформированности компетенции ПК-5, индикатор ПК-5.2

##### Примеры заданий в составе Лабораторного практикума

##### Семестр 6

Лабораторный практикум 2. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Лабораторный практикум 4. Методы обработки данных и приближения функций

Лабораторный практикум 5. Численное интегрирование (изучение свойств методов)

### 5.2.3. Типовое проектное практическое задание для оценивания сформированности компетенции ПК-5, индикатор ПК-5.3, ПК-5.4

#### 5.2.4.

##### Примеры тем проектов.

##### Семестр 6

Практикум 3. Численное решение задачи Коши для ОДУ (приложения, **включая проект**)

Лабораторный практикум 1. Анализ реализации итерационного метода на примере схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона (**включая проект**)

Лабораторный практикум 3. Решение нелинейных уравнений и систем. Решение нестационарных уравнений в частных производных (**включая проект**)

Содержание и порядок выполнения заданий, а также варианты заданий приведены в [4], [5]

### 5.2.4. Контрольные работы для оценки компетенции ПК-5

#### Примеры задач аудиторной контрольной работы №1 для оценки компетенции ПК-5

##### Вариант 1

##### *Задача №1*

В таблице приведены (приблизленно) значения функции  $f(x) = ch(x)$ :

$x$	0.2	0.4	0.5
$f(x)$	1.02007	1.08107	1.12763

Постройте интерполяционный полином степени 2, используя узлы 0.2, 0.4, 0.5. Вычислите с его помощью  $f(x)$  в точке  $x = 0.35$ .

Проведите полный анализ погрешности в указанной точке. В том числе:

- 1) Запишите определение и получите формулу погрешности интерполяции.
- 2) Оцените погрешность интерполяции.
- 3) Запишите определение, необходимые предположения и оцените вычислительную погрешность.
- 4) Запишите определение и оцените общую погрешность.
- 5) Запишите искомое значение  $f(x)$  с учетом оценок общей погрешности.

*Примечание.* Ошибкой задания табличной функции считаем половину единицы последнего разряда.

### Задача №2

Используя табличные данные

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
$f(x)$	1.005	1.02007	1.04534	1.08107	1.12763	1.18547	1.33743

и оператор

$$(-f_2 + 8*f_1 - 8*f_{-1} + f_{-2})/(12*h)$$

вычислите приближенное значение производной порядка 1 в точке  $x = 0.3$ :

Проведите полный анализ погрешности. В том числе:

1) Запишите определение и получите формулу погрешности численного дифференцирования.

Выделите главный член погрешности и определите ее порядок.

2) Запишите определение, необходимые предположения и оцените вычислительную погрешность.

3) Запишите определение и оцените общую погрешность.

*Примечание.* Ошибкой задания табличной функции считаем половину единицы последнего разряда.

### Задача №3

С целью численного решения дифференциального уравнения  $u'_t = u''_{xx}$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $t \in [0,1]$  с начальным условием  $u(x,0)=2x^2$  и граничными условиями  $u(0,t)=0$ ,  $u(1,t)=2$  запишите чисто неявную разностную схему, число разбиений по пространству  $n=4$  и по времени  $m=10$ . Найдите значения сеточной функции  $v(x,t)$  на нулевом и первом слое.

## Примеры задач аудиторной контрольной работы №2 для оценки компетенции ПК-5 Вариант №1

### Задача №1

С целью численного решения стационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0, 1),$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1.$$

$$k(x) = \begin{cases} 2 \cos(x), & x \in (0, \xi) \\ x^2, & x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0, \xi) \\ 2-x^2, & x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \cos(x) + x, & x \in (0, \xi) \\ \sin(x) + x, & x \in (\xi, 1) \end{cases}, \quad \xi=0.501$$

постройте разностную схему методом баланса. Интегралы вычислите приближенно, используя формулу средних прямоугольников. Запишите схему и коэффициенты схемы для данной задачи при произвольном числе разбиений и при  $n=10$  с рисунком.

### Задача №2

Поставлена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$U'(x) = x * x - 3 * U(x)$$

$$x_0=0, U(x_0)=1.$$

а) Запишите расчетные формулы метода Рунге-Кутты второго порядка (I) и, полагая шаг равным 0.1, найдите численно  $U(0.2)$ .

б) Запишите формулу для оценки локальной погрешности при  $x = 0.2$  и оцените ЛП.

в) Используя результаты а), б), скорректируйте численное решение при  $x = 0.2$ .



### Задача №3

Поставлена задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U_1'(x) = 2 \cdot U_1(x) - U_2(x) + x$$

$$U_2'(x) = U_1(x) + U_2(x) \cdot U_2(x) - x$$

$$x_0 = 0, U_1(x_0) = 1, U_2(x_0) = 1.$$

- Запишите расчетные формулы метода Рунге-Кутты второго порядка (I) и, полагая шаг равным 0.1, найдите численно  $U_1(0.2)$ ,  $U_2(0.2)$
- Запишите, как подсчитать вектор  $S$  для оценки погрешности при  $x=0.2$ .
- Пусть для управления шагом выбрано значение  $\epsilon_{ps} = 0.001$ . Можно ли принять результат, полученный для  $U_1(0.2)$ ,  $U_2(0.2)$ ?
- Нужно (можно) ли изменить шаг для продолжения счета?

### Задача №4

Используя определение и разложение в ряды, докажите порядок метода из задачи №2а).

### Задача №5

В условиях задачи №2а):

Что называют глобальной погрешностью (ГП) в точке  $x=0.2$ ?

Как изменится глобальная погрешность в точке  $x = 0.2$ , если решать задачу с шагом 0.005?

На чем основано ваше утверждение?

## 5.2.5 Вопросы для собеседования (для оценки компетенции ПК-5)

### Примеры вопросов собеседования по результатам выполнения практических и лабораторных заданий, семестр 6

- Обусловленность линейных систем, числа обусловленности, их свойства, оценка погрешности решения возмущенных линейных систем
  - Решение СЛАУ большой размерности: метод простой итерации, метод минимальных невязок, подбор параметров и теоремы о сходимости
  - Оптимизация сходимости: метод с чебышевским  $k$ -набором параметров, построение, подбор параметров, доказательство свойств и сходимости.
  - Оптимизация сходимости: метод сопряженных градиентов
- И другие...

## 5.3. Задания (оценочные средства), выносимые на зачет

Для оценки компетенции ПК-5 на зачет по дисциплине «Практикум по численным методам», семестр 6, выносятся:

- Собеседование по результатам выполнения Практикума, семестр 6.
- Собеседование по результатам выполнения Лабораторного Практикума, семестр 6.
- Собеседование по результатам выполнения проектов и контрольной работы, семестр 6.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М. ; СПб.: Физматлит: Невский диалект: Лаборатория базовых знаний, 2000, 2001, 2002; – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003 (52 экз.).
- Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977, 1980, 1989. (65 экз.).

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. (44 экз.)
4. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 5. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 815Е.14.08. URL: <https://e-learning.unn.ru/course/index.php?categoryid=24>. Вход требует авторизации.
5. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 6. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 831Е.14.08. URL: <https://e-learning.unn.ru/course/index.php?categoryid=24>. Вход требует авторизации.

б) дополнительная литература

6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966, 1970. (40 экз.).
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М: Наука, 1980. (50 экз.).
8. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М: Физматгиз, 1960. (26 экз.).

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Литература для студента режим доступа <http://www.libsib.ru/etika/etika-delovogo-obscheniya/vse-stranitsi>
2. Научная электронная библиотека режим доступа <http://elibrary.ru/>
3. EqWorld. Мир математических уравнений / Разработчик – А. Д. Полянин. – М.: ИПМ РАН, 2004-2014. Электронный ресурс, содержащий электронные версии книг в свободном доступе <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>
4. <https://e-learning.unn.ru/course/enrol/index.php?id=827>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой: помещения для проведения занятий лекционного типа, оборудованные мультимедийной техникой (компьютер, проектор, экран); занятий семинарского типа; компьютерный класс с лицензионным программным обеспечением (среды разработки) для выполнения лабораторных практикумов.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ДУМиЧА Стронгина Н.Р.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ДУМиЧА: д.ф.-м.н. А.В. Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики  
от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.