

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Теория чисел

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.16 Теория чисел относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знает методы решения задач из области математических и естественных наук ОПК-1.2: Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в области математических и естественных наук	ОПК-1.1: Знать основные понятия, методы и результаты теории чисел. ОПК-1.2: Уметь применять теоретические знания к решению задач теории чисел. ОПК-1.3: Владеть техникой доказательства утверждений теории чисел, методами и способами отыскания решений типовых задач.	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Делимость в кольце целых чисел.	11	3	4	7	4
Тема 2. Теория сравнений.	26	6	10	16	10
Тема 3. Цепные дроби.	24	8	8	16	8
Тема 4. Квадратичные вычеты.	16	4	4	8	8
Тема 5. Первообразные корни и индексы.	15	3	6	9	6
Тема 6. Распределение простых чисел.	14	8	0	8	6
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	32	32	66	42

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Делимость в кольце целых чисел. Деление с остатком в кольце целых чисел. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Выражение наибольшего общего делителя (a,b) через a и b. Наименьшее общее кратное.

Тема 2. Теория сравнений. Кольцо классов вычетов по модулю m. Свойства сравнений. Решение сравнений 1-степени. Китайская теорема об остатках.

Тема 3. Цепные дроби. Разложение рационального числа в цепную дробь с целыми неполными частными. Разложение вещественного числа в цепную дробь. Подходящие дроби и их свойства.

Тема 4. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра и его свойства.

Тема 5. Первообразные корни и индексы.

Тема 6. Распределение простых чисел.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

«Теория чисел 4 курс (математика)», <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4494>.

Иные учебно-методические материалы:

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1972;
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numtheory.htm>
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. М. Просвещение, 1966.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numtheory.htm>
3. Сеpp Ж.-П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Типовые задания для оценки сформированности компетенции

1. Найти каноническое разложение числа 18!
2. Найти разложение в конечную цепную дробь число $162/93$.
3. Найти значение бесконечной периодической дроби $\langle -1; 1, 1, (1, 2) \rangle$.
4. Найти число делителей, сумму делителей и функцию Эйлера числа 539.
5. Решить сравнение $39x \equiv 17 \pmod{92}$ (ОПК-1)
6. Решить систему сравнений $3x \equiv 4 \pmod{5}$
 $5x \equiv 6 \pmod{7}$
 $7x \equiv 8 \pmod{9}$.
7. С помощью символа Лежандра выяснить разрешимо сравнение или нет $x^2 \equiv 21 \pmod{29}$.
8. Найти примитивный корень и составить таблицу индексов по модулю 14.
9. На станцию прибыло 500 т угля в 18 вагонах. В вагонах было по 15, 20, и 30 т угля. Сколько вагонов было по 15 т, сколько по 20 и сколько по 30 т ?
10. Какие две цифры следует приписать к числу 32, чтобы полученное число делилось на 3 и на 7?

11. Решить систему сравнений $4x \equiv 3(7)$

$$5x \equiv 4(6).$$

12. Вычислить символы Лежандра $(22/13)$, $(426/491)$, $(151/587)$.

13. При помощи символа Лежандра выяснить, какие из следующих сравнений разрешимы:

$$X^2 \equiv 5(19), X^2 \equiv 5(29), X^2 \equiv 2(97), X^2 \equiv 151(587).$$

14. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел при делении на 13 не может давать в остатке 1.

15. Составить таблицу индексов по модулю 9, по модулю 25.

16. Решить сравнение $3X^5 \equiv 4(25)$.

17. Разложить рациональные числа в цепные дроби

$$127/52; 1,23; 95122/53808.$$

18. Свернуть непрерывные дроби $\langle 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \rangle$, $\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$, $\langle a, a, a, a, a \rangle$.

19. При помощи цепных дробей сократить дробь $1491/2247$.

20. Разложить в периодические дроби квадратичные иррациональности $5^{1/2}$, $(2 - 3^{1/2})/5$.

21. Найти квадратичную иррациональность, которая разлагается в следующую периодическую цепную дробь $\langle (2, 3) \rangle$, $\langle 1, 2, 3, (4) \rangle$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решены все задачи. Допущено минимальное количество ошибок.
не зачтено	Большинство задач не решены.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				

достижения							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»

	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Свойства делимости в кольце. Деление с остатком в кольце целых чисел.
2. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Выражение наибольшего общего делителя (a,b) через a и b. Наименьшее общее кратное.
3. Свойства взаимно простых чисел.
4. Факториальность кольца целых чисел (Основная теорема арифметики). Разложение на простые множители наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Закон распределения простых чисел Чебышева, асимптотический закон распределения простых чисел (без доказательства).
5. Кольцо классов вычетов по модулю m. Свойства сравнений. Решение сравнений 1-степени.
6. Группа обратимых элементов кольца. Теорема Эйлера.
7. Китайская теорема об остатках. Мультипликативность функции Эйлера. Вычисление функции Эйлера. Малая теорема Ферма.
8. Китайская теорема об остатках. Решение системы сравнений по взаимно простым модулям.
9. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
10. Первообразные корни по модулю m. Индексы.
11. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра и его свойства.
12. Лемма Гаусса. Символ Лежандра (2/p).
13. Квадратичный закон взаимности Гаусса.

14. Целая и дробная части числа. Кратность, с которой простое p входит в разложение $n!$ на простые множители.
15. Разложение рационального числа в цепную дробь с целыми неполными частными. Разложение вещественного числа в цепную дробь.
16. Подходящие дроби и их свойства.
17. Решение линейных уравнений в целых числах.
18. Применение цепных дробей для решения сравнений 1 степени.
19. Бесконечные периодические цепные дроби и квадратичные иррациональности.
20. Приближение вещественных чисел рациональными числами и цепные дроби.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел : [учеб. для гос. ун-тов]. - 8-е изд., испр. - М. : Наука, 1972. - 167 с. - 0.52., 18 экз.

Дополнительная литература:

1. Серр Жан-Пьер. Курс арифметики / пер. с фр. А. И. Скопина ; под ред. А. В. Малышева. - М. : Мир, 1972. - 0.51., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Теория чисел 4 курс (математика)»

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4494>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Кузнецов Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.