

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины
Практикум по математическому анализу

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность образовательной программы
Инженерия программного обеспечения

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.25 Практикум по математическому анализу относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК-1.1: Знает основные положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории и истории основного, теории коммуникации; знает основную терминологию</p> <p>ОПК-1.2: Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты</p> <p>ОПК-1.3: Имеет практический опыт работы с решением стандартных математических задач и применяет его в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1:</p> <p>Знает определения, формулировки теорем.</p> <p>Понятие числовой последовательности, ее предела.</p> <p>Определение предела функции в точке по Гейне и Коши.</p> <p>Непрерывность функции в точке.</p> <p>Классификацию точек разрыва функции.</p> <p>Понятия производной и дифференциала первого и высших порядков.</p> <p>Формулу Тейлора.</p> <p>Правило Лопиталья.</p> <p>Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции одного переменного.</p> <p>Необходимое и достаточные условия локального экстремума.</p> <p>ОПК-1.2:</p> <p>Понимает поставленную задачу и принцип ее решения.</p> <p>ОПК-1.3:</p> <p>Умеет решать стандартные задачи.</p> <p>Находить точные грани множества.</p> <p>Вычислять пределы числовых последовательностей и функций.</p>	Задания	Зачёт: Задания

		Находить производные и дифференциалы высших порядков, уравнение касательной к графику функции в точке. Проводить полное исследование функции и на основании данного исследования строить эскизы графиков функций.		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	5
Часов по учебному плану	180
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	2
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	112
- КСР	2
самостоятельная работа	64
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
о ф о	о ф о	о ф о	о ф о		
Вводный курс	9		6	6	3
Числовые последовательности	14		8	8	6
Предел функции	13		8	8	5
Непрерывные функции	4		2	2	2

Производная функции	12		10	10	2
Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения	19		14	14	5
Тема 1 Числовые ряды	8	2	4	6	2
Тема 2 Функциональные последовательности и ряды	16		10	10	6
Тема 3 Степенные ряды	16		10	10	6
Тема 4 Несобственные интегралы	16		10	10	6
Тема 5 Кратный интеграл. Интегралы, зависящие от параметра	16		10	10	6
Тема 6 Несобственные интегралы зависящие от параметра	16		10	10	6
Тема 7 Унитарное пространство кусочно-непрерывных функций	12		6	6	6
Тема 8 Ряды Фурье	7		4	4	3
Аттестация	0				
КСР	2			2	
Итого	180	2	112	116	64

Содержание разделов и тем дисциплины

Введение. Метод математической индукции. Модуль, окрестность точки. Ограниченность множества, существование точных граней. Функции и их свойства (взаимно-однозначные, обратные, четные, нечетные, периодические, монотонные). Основные элементарные функции, классификация элементарных функций. Гиперболические функции.

Числовые последовательности: Предел последовательности, его единственность; предельные переходы в неравенствах, связь сходимости с ограниченностью; свойства бесконечно малых, арифметические свойства предела; монотонные последовательности, сходимость монотонной ограниченной последовательности; критерий Коши сходимости последовательности; частичные пределы и их связь со сходимостью.

Предел функции: Определение по Гейне, определение по Коши и их эквивалентность; предел функции на бесконечности, обобщение понятия предела, односторонние пределы; первый замечательный предел; сравнение бесконечно малых и бесконечно больших.

Непрерывные функции: Непрерывность функции в точке, на множестве. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность обратной функции, композиции функций. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, промежуточные значения.

Производная функции: Определение производной, односторонние производные. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Правила нахождения производной и дифференциала. Производная сложной, обратной, параметрически заданной функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.

Правило Лопиталю. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Нахождение пределов с помощью формулы Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Условия монотонности функции. Экстремумы функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Математический анализ ДО (1 семестр), Математический анализ ДО (2 семестр), <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=243>, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=626>.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Сформулировать определения с помощью кванторов \forall и \exists

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$;
3. $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность;
4. $\{x_n\}$ – расходящаяся последовательность;
5. $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность;
6. $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность;
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$;
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$;
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$;
10. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность;
11. $\{x_n\}$ – неограниченная последовательность;
12. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.
13. Критерий Коши сходимости последовательности.
14. Критерий Коши расходимости последовательности.
15. $\sup\{x_n\} = M$.
16. $\inf\{x_n\} = m$;

Вопросы

1. Сформулировать теоремы о сохранении нестрогого неравенства в пределе.
2. Сформулировать аксиому непрерывности.
3. Сформулировать принцип вложенных отрезков.
4. Сформулировать теорему Больцано-Вейерштрасса.

1. Найти пределы

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right)$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$,

2. Найти предел $\{x_n\} = \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{3^n}} \right\}$, обосновав свои действия с помощью теоремы „о 2-х милионерах“.
3. Доказать сходимость $\{x_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2} \sin 6^k \right\}$.
4. Доказать по определению Коши (найти $\delta(\varepsilon)$) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{3^x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3^x + 9^x}}{3^{x+1} - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 5} - x \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7+x}{2+6x} \right)^{\frac{4}{1-x}}$

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\operatorname{tg}(3x)}$

6. Сравнить функции $f(x) = \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right)$ и $g(x) = \frac{3x^2 + 5x}{6x^3 - 4}$ при $x \rightarrow \infty$.

1 балл

7. Найдите точки разрыва функции $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2} \right)}{x-1}$, исследуйте их характер, постройте эскиз графика функции в окрестности найденных точек.

1 балл

Контрольная работа по теме „Дифференцирование“

1. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

2. Найти $y'(x)$, если $y = (\arcsin \sin^2 x)^{\arctg x}$.

3. Найти $d^n y$, если $y = (3 - 2x)^2 e^{2-3x}$.

4. Производные параметрически заданных функций

(a) Найти $y'(x), y''(x)$, если $x = \ln \operatorname{tg}(\frac{t}{2}), y = \ln \operatorname{tg} t$.

(b) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x = \ln \operatorname{tg}(\frac{t}{2}), y = \ln \operatorname{tg} t$ в точке, соответствующей значению параметра $t = \pi/3$.

5. Неинвариантность формы дифференциалов старших порядков.

(a) Найти $d^2 y, y = \operatorname{tg} x$, если (а) x – зависимая переменная, (б) x – независимая переменная, (с) $x = \sqrt{t}$.

(b) Выразите $dy, d^2 y, d^3 y$ функции $y = e^u$ через $du, d^2 u, d^3 u$.

6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$.

7. Формула Тейлора

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}$.

(b) Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 2$ до $o((x-2)^n)$, используя известное разложение.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.

Оценка	Критерии оценивания
	Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Уровень знаний гораздо ниже минимальных требований. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

						объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Доказать, что последовательность расходится

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \cdot \frac{3n+7}{2n+5} \right)$ и доказать по определению, что именно это число является пределом последовательности.

3. Ис-ть на непрерывность и дифференцируемость

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x > 0; \\ 2x - 1, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

4. Найти dy, d^2y , если $y = y(x)$ в случаях: а) если x - независимая переменная, б) если x - зависимая переменная, в) если $x = \log_2 t$.

5. Найти $\lim_{x \rightarrow +0} (2\sqrt{x} + x)^{1/\ln x}$.

6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2}$.

7. Разложить функцию $f(x) = 1/x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 2$ до $o((x - 2)^n)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, не ниже минимального. Работа выполнена без ошибок или допущены незначительные и/или негрубые ошибки.
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа от работы.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Ильин В. А. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I. Ч. 1. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I / Ильин В. А., Позняк Э. Г. - 7-е изд., стереот. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2021. - 648 с. - Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика". - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0902-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=781681&idb=0>.

2. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : Учебник. - 4-е изд. - Москва :

Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2015. - 444 с. - Профессиональное образование. - ISBN 978-5-9221-1585-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=620670&idb=0>.

3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Демидович Б. П. - 25-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 624 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-47148-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=865605&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Никольский С. М. Курс математического анализа / Никольский С. М. - 6-е изд., стер. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 592 с. - Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0160-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665764&idb=0>.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 : учебник для вузов / Фихтенгольц Г. М. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 608 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-45809-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=859125&idb=0>.

3. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учебник: 3-х томах / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Кудрявцев Л.Д. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 496 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0306-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665749&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

<http://e-learning.unn.ru/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Автор(ы): Рябова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук.

Рецензент(ы): Кузенков Олег Анатольевич, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.