

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Утверждено
решением ученого совета ННГУ
протокол № 6 от «31» мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Векторный и тензорный анализ

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки: 28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника
Направленность (профиль): "Материалы микро- и наносистемной техники"

Форма обучения: очная

Нижний Новгород, 2023

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» относится к базовой части Б1.Б блока Б1 «Дисциплины (модули)», является обязательной для освоения, преподается на втором году обучения, в третьем семестре. Освоению дисциплины предшествует освоение дисциплин (модулей) «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Объем дисциплины «Векторный и тензорный анализ» составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов, из которых 49 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (1 час – мероприятия промежуточной аттестации; 16 часов занятия лекционного типа, 32 часа занятия семинарского типа (практические занятия), в том числе 2 часа – мероприятия текущего контроля успеваемости), 59 часов составляет самостоятельная работа обучающегося в течение семестра.

Цели и задачи освоения дисциплины:

- овладение методами тензорной алгебры и подготовка студентов к изучению разделов теоретической физики и ряда специальных дисциплин, таких как теория упругости, кристаллография;
- освоение студентами специфики математического аппарата алгебры тензоров, операций с основными дифференциальными операторами и их комбинациями, а также ознакомление с физическими примерами тензорных величин;
- выработка у студентов практических навыков действий над тензорными величинами, преобразований систем координат, использования интегральных теорем векторного анализа.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

В результате освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» у студентов формируются и развиваются следующие компетенции:

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и	ОПК-1.1. Знает фундаментальные законы физики и математики, методы математического анализа и моделирования. ОПК-1.2 Умеет решать задачи	Знать основные теоретические положения векторного и тензорного анализа. Уметь решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания	1.Индивидуальное собеседование. 2. Выполнение практических заданий.

моделирования	<p>профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний.</p> <p>ОПК-1.3. Иметь навыки применения физических законов и математических методов для решения задач профессиональной деятельности теоретического и прикладного характера</p>	<p>основ векторного и тензорного анализа.</p> <p>Владеть навыками расчётов с использованием основ векторного и тензорного анализа.</p>	
---------------	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия практического типа	32
самостоятельная работа	59 (работа в семестре)
Промежуточная аттестация	3-зачёт

3.2 Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа в течение семестра, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) в течение семестра, часы, из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	

1. Векторная алгебра. Понятие линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Декартова систем координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат. Матрица поворота и ее свойства.	14	2	4	—	6	8
2. Тензорная алгебра. Определение тензора. Ранг тензора. Сложение, умножение тензоров. Свертка. Скалярное умножение тензоров. Теорема деления.	16	2	4	—	6	10
3. Приложения теории тензоров. Симметрия тензоров. Инвариантность тензорных соотношений. Тензор поляризации, тензор механических напряжений, тензор инерции. Главные оси и главные значения тензора. Тензорная поверхность. Инварианты тензоров второго ранга. Изотропные тензоры. Тензор Леви-Чивита. Векторное, двойное векторное и смешанное произведения в тензорной форме.	28	4	8	—	12	16
4. Тензорные поля. Градиент, ротор и дивергенция. Понятия потенциального и вихревого полей. Дифференциальные операции 2-го порядка, оператор Лапласа. Интегральные теоремы векторного анализа. Векторные тождества.	28	4	8	—	12	16
5. Криволинейные системы координат. Криволинейные системы координат, сферические и цилиндрические координаты. Коэффициенты Ламе. Метрический тензор. Якобиан. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.	12	2	4	—	6	6
6. Преобразования компонент векторов при инверсии системы координат. Инверсия декартовой системы координат. Правая и левая тройки базисных векторов. Полярный и аксиальный векторы. Скаляры и псевдоскаляры.	10	2	4	—	6	4
В т.ч. текущий контроль	2	2				—

4. Образовательные технологии

- 1) Чтение лекций;
- 2) сопровождение лекций написанием и выводом формул, построением графиков, изображением рисунков на доске;
- 3) методика «вопросы и ответы»;
- 4) выполнение практического задания у доски;
- 5) индивидуальная работа над практическим заданием;
- 6) работа в парах над практическим заданием;
- 7) работа в малых группах над практическим заданием;
- 8) методика «мозговой штурм».

5. Учебно-методическое обеспечение, формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся предполагает изучение конспектов лекций, выделенных разделов основной литературы, а также дополнительной литературы, выполнение практических заданий, отвечающих изучаемым разделам дисциплины. Перечень основной и дополнительной литературы для самостоятельного изучения приведен в п. 7 настоящей Рабочей программы дисциплины.

Контрольные вопросы для промежуточной аттестации, примеры практических заданий приведены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

6.1 Перечень компетенций выпускников образовательной программы, в формировании которых участвует дисциплина, с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений) приведён выше (раздел 2). Ниже приведена таблица образовательных дескрипторов (отличительных признаков уровней освоения компетенций)

Индикаторы компетенции	ОЦЕНКА СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИИ						
	Плохо	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Очень хорошо	Отлично	Превосходно
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала или невозможность оценить полноту знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, полностью соответствующем программе подготовки, допущены одна-две негрубых ошибки.	Уровень знаний в объеме, полностью соответствующем программе подготовки, либо, возможно, превышающем ее. Без ошибок.

	вследствие отказа обучающегося от ответа.					ых ошибки.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений или невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа.	При решении стандартных задач и/или выполнении стандартных практических заданий не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками и/или выполнены все практические задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками и/или выполнены все практические задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с некоторыми недочетами и/или выполнены все практические задания, в полном объеме, но некоторые с небольшими недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами и/или выполнены все практические задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи и/или выполнены все практические задания, в полном объеме без недочетов.
<u>Навыки (владения)</u>	Отсутствие владения материалом или невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа.	При решении стандартных задач и/или выполнении стандартных практических заданий не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач и/или выполнения стандартных практических заданий с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач и/или выполнения практических заданий с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач и/или выполнения практических заданий без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач и/или выполнении нестандартных практических заданий без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач и/или выполнению нестандартных практических заданий.
Характеристика сформированности компетенции	Компетенция совершенно не сформирована. Отсутствуют знания, умения, навыки, необходимые для решения практических (профессиональных) задач.	Компетенция не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков явно недостаточно для решения практических (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач,	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям, но есть недочеты. Имеющихся знаний, умений и навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач,	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных практических (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции превышает стандартные требования. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для применения творческого подхода к решению сложных практических

			но требуется дополнительная практика по большинству практических задач.	льных) задач, но требуется дополнительная практика по некоторым профессиональным задачам.			(профессиональных) задач.
--	--	--	---	---	--	--	---------------------------

6.2 Описание шкал оценивания

Промежуточной аттестацией для дисциплины «Векторный и тензорный анализ» является зачет.

По итогам зачета выставляется оценка «Зачтено» или «Не зачтено». Оценка «Не зачтено» означает отсутствие аттестации, оценка «Зачтено» выставляется при успешном прохождении аттестации.

6.3 Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

Контрольные вопросы для индивидуального собеседования представлены настоящей Рабочей программы дисциплины.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

Примеры практических заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации представлены настоящей Рабочей программы дисциплины.

Критериями оценивания являются полнота знаний, наличие умений и владений (навыков), перечисленных настоящей Рабочей программы дисциплины.

«Не зачтено» – обучающийся не продемонстрировал представления об основных теоретических разделах курса, не показал минимально допустимый уровень умений и навыков выполнения практических заданий;

«Зачтено» – обучающийся продемонстрировал изложение формулировок основных теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения практических заданий базового уровня сложности.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции

6.4.1. При проведении промежуточной аттестации обучающимся предлагаются следующие контрольные вопросы, охватывающие программу дисциплины «Векторный и тензорный анализ»:

1. Линейная зависимость векторов.
2. Базис в векторном пространстве. Декартова система координат.
3. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат.
4. Операции над тензорными величинами.
5. Теорема деления.
6. Симметрия тензоров. Симметричная и антисимметричная составляющие тензора второго ранга.
7. Приведение симметричного тензора второго ранга к диагональному виду.
8. Тензорная поверхность.
9. Изотропные тензоры.
10. Оператор «набла» (примеры использования).
11. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламэ.
12. Криволинейные координаты. Якобиан.
13. Полярные и аксиальные векторы.
14. Тензор инерции твердого тела.

6.4.2. Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

1. Дан вектор $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$, где \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} – взаимно перпендикулярные векторы, причем $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 3$. Найти углы между вектором \vec{p} и
 - а) векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ;
 - б) векторами $\vec{a} + \vec{b}$, $-(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
2. При каком значении t векторы $\vec{a} = \{3, 6, 9\}$, $\vec{b} = \{2, 5, 8\}$, $\vec{c} = \{4, 7, t\}$ компланарны?
3. Параллелепипед построен на некопланарных векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Найти площади его диагональных сечений и объем.
4. Компоненты двух векторов заданы в различных системах координат следующим образом: при повороте системы координат K вокруг оси Oy на 30° $\vec{a}' = \{1, 1, \sqrt{3}\}$, а при повороте K вокруг оси Oz на 45° $\vec{b}'' = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$. Найти скалярное произведение этих векторов.
5. Доказать, что произведение $\delta_{ij} A_j B_n C_n$ является вектором, если \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} – векторы.
6. В некоторой декартовой системе координат имеет место соотношение $T_{nkm} = A_{mi} R_{ink}$. Доказать, что A_{mi} – тензор II-го ранга, если T_{nkm} и R_{ink} – тензоры III-го ранга.
7. В некоторой системе координат известны компоненты двух векторов – $\vec{A} = \{1, 2, -1\}$ и $\vec{B} = \{2, 3, -4\}$. Найти матрицу тензора $T_{ij} = A_i B_j - \varepsilon_{ijk} A_k$ и вычислить его след.
8. Пусть вектор \vec{A} имеет компоненты $\{1, 2, 3\}$. Найти следующую свертку: $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{klm} A_m$.

9. Материал, характеризуемый тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ помещен в однородное электрическое поле с напряженностью}$$

\vec{E} . Найти тензор диэлектрической восприимчивости α_{ij} диэлектрика ($4\pi\alpha_{ik} = \varepsilon_{ik} - \delta_{ik}$). Найти вектор поляризации диэлектрика \vec{P} и вектор электрической индукции \vec{D} ($P_i = \alpha_{ik}E_k$, $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$). Найти углы, которые векторы \vec{P} , \vec{D} и \vec{E} образуют друг с другом, а также указать направления, для которых векторы \vec{D} и \vec{E} коллинеарны:

$$\text{а). } \vec{E} = E_0 \{2, 1, -2\}; \quad \text{б). } \vec{E} = E_0 \{-2, 2, 1\}.$$

10. В некоторой системе координат известны компоненты тензора II-го ранга:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Разложить его на симметричную } S_{ij} \text{ и } A_{ij} \text{ антисимметричную}$$

составляющие. Найти $Sp(S_{in}A_{nj})$.

11. Найти градиент скалярной функции φ :

$$\begin{aligned} \text{а). } \varphi &= \frac{e^{(\vec{a} \cdot \vec{r})}}{r}; & \text{в). } \varphi &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})^3}{r^2}; & \text{д). } \varphi &= \frac{\sin r}{r}; \\ \text{б). } \varphi &= r^3(\vec{c} \cdot \vec{r}); & \text{г). } \varphi &= ((\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \sin(\vec{b} \cdot \vec{r})); & \text{е). } \varphi &= (\vec{r} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]). \end{aligned}$$

12. Найти дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} :

$$\begin{aligned} \text{а). } \vec{A} &= [\vec{a} \times \vec{r}]; & \text{д). } \vec{A} &= \frac{[\vec{a} \times \vec{r}]}{r^3}; & \text{з). } \vec{A} &= \left[\frac{\vec{a}}{r} \times \vec{r} \right]; \\ \text{б). } \vec{A} &= \vec{c} \exp(\vec{k} \cdot \vec{r}); & \text{е). } \vec{A} &= [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot \sin r; & \text{и). } \vec{A} &= \frac{\vec{r}}{r} e^{(\vec{c} \cdot \vec{r})}; \end{aligned}$$

13. Доказать тождество:

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}] + [\vec{A} \times \text{rot } \vec{B}].$$

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

1. Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.
2. Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Г.М. Максимова, А.И. Малышев, А.В. Тележников, Основы векторного и тензорного анализа для физиков: учебно-методическое пособие, Н.Новгород, изд-во ННГУ, 2017, 109 с.
http://www.unn.ru/books/met_files/VTM_Malyshev.doc.

2. И.Э. Келлер, Тензорное исчисление: учеб. Пособие, Санкт-Петербург, Лань, 2012, 176 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3814>.
3. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности: учебное пособие, СПб.: Лань, 2010, 480 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/544>.

б) дополнительная литература:

1. А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов, Векторный анализ и начало тензорного исчисления, М., Высшая школа, 1966, 252 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 10 экз. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=94886>
2. В.Г. Левич, Курс теоретической физики, Т. 1. М., Наука, 1969, 910 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 12 экз. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=72316>
3. Б.М. Будак, С.В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, М., Наука, 1967, [607 с.](#) Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 12 экз. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=448406>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы Фундаментальной библиотеки ННГУ <http://www.lib.unn.ru/>.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями установленного ННГУ образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 28.03.01 – «Нанотехнологии и микросистемная техника».

Автор,
доцент кафедры
теоретической физики
к.ф.-м.н., доцент Д.В. Хомицкий

Рецензент:
заведующий кафедрой
физики полупроводников, электроники и нанoeлектроники
д.ф.-м.н., профессор Д.А. Павлов

Заведующий кафедрой
теоретической физики
д.ф.-м.н., доцент В.А. Бурдов

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии физического факультета ННГУ, протокол б/н от «20» мая 2023 г.

Председатель
Учебно-методической комиссии
физического факультета ННГУ А.А. Перов