Приложение 4

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Алгебра

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.08 Алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции**		**Наименование оценочного средства**	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	**Результаты обучения по дисциплине**	**Для текущего контроля успеваемости**	**Для промежуточной аттестации**
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	*УК-1.1: Знает методы поиска, критического анализа и синтеза информации, основы системного подхода для решения поставленных задач* *УК-1.2: Умеет осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач* *УК-1.3: Владеет основами критического анализа и синтеза информации, системного подхода для решения поставленных задач*	*УК-1.1:* *Знает основные подходы и методы изучения алгебраических структур.* *УК-1.2:* *Умеет работать с литературой по алгебре для применения системного подхода для решения поставленных задач.* *УК-1.3:* *Владеет умением критического подхода анализируемой информации.*	*Аудиторная контрольная работа* *Индивидуальное устное собеседование*	*Экзамен:* *Контрольные вопросы* *Задачи*
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	*ОПК-1.1: Знает методы решения задач из области математических и естественных наук* *ОПК-1.2: Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности* *ОПК-1.3: Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности в области*	*ОПК-1.1:* *Знает об основных теоремах и разделах курса, их месте в научно-исследовательской и педагогической деятельности, в том числе базовые понятия, методы и строгие доказательства фактов разделов дисциплины «Алгебра». На основе вышеперечисленного понимать методы решения задач из различных разделов математических и естественных наук.* *ОПК-1.2:*	*Аудиторная контрольная работа* *Индивидуальное устное собеседование*	*Экзамен:* *Контрольные вопросы* *Задачи*

	математических и естественных наук	*Умеет применять теоретические знания для решения типовых задач изучения различных алгебраических структур.* *ОПК-1.3:* *Владеет техникой доказательства математических утверждений и различными методами и способами отыскания решений стандартных задач алгебры.*		

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	**12**
Часов по учебному плану	**432**
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	**128**
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	**32**
- КСР	**6**
самостоятельная работа	**158**
Промежуточная аттестация	**108** **Экзамен**

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	офо	офо	офо	офо	офо
Системы линейных уравнений	6	2		2	4

Отображения множеств	6	2		2	4
Понятие векторного пространства	8	2		2	6
Теорема о ранге матрицы и ее применения	10	4		4	6
Линейные отображения и матрицы	10	4		4	6
Подстановки	10	4		4	6
Определители	10	4		4	6
Применение теории определителей	8	2		2	6
Основные алгебраические структуры	10	4		4	6
Поле комплексных чисел	10	4		4	6
Кольцо многочленов от одной переменной	10	4		4	6
Теория делимости в коммутативных областях целостности	10	4		4	6
Локализация корней многочлена	8	2		2	6
Поле частных коммутативной области целостности	8	2		2	6
Кольцо многочленов от n переменных над полем	8	2		2	6
Симметрические многочлены	8	2		2	6
Векторное (линейное) пространство.	14	8		8	6
Линейные отображения (операторы) и их структура.	18	12		12	6
Билинейные (полуторалинейные) и квадратичные формы	12	6		6	6
Евклидово (унитарное) пространство	12	6		6	6
Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств	16	10		10	6
Тензоры	12	6		6	6
Группы	18	6	6	12	6
Действие группы на множестве	18	6	6	12	6
p-группы, разрешимые и простые группы	18	6	6	12	6
Задание группы образующими и соотношениями	18	6	6	12	6
Конечные и конечнопорожденные абелевы группы.	22	8	8	16	6
Аттестация	108				
КСР	6			6	
Итого	432	128	32	166	158

Содержание разделов и тем дисциплины

Системы линейных уравнений
Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛУ) методом Гаусса. Критерий совместности, несовместности, определенности, неопределенности СЛУ по ступенчатому виду.
Отображения множеств.
Инъективные, сюръективные, биективные отображения. Ассоциативность произведения отображений. Характеризация инъективных, сюръективных, биективных отображений в терминах произведения

отображений.
Понятие векторного пространства.
Аксиомы векторного пространства и простейшие следствия из них. Линейная зависимость (независимость) систем векторов. Свойства линейной зависимости. Основная лемма о линейной зависимости. Базис системы векторов. Координаты вектора в базисе. Ранг системы векторов и его свойства.
Теорема о ранге матрицы и ее применения.
Теорема о ранге матрицы. Критерий совместности, несовместности, определенности, неопределенности СЛУ в терминах рангов (теорема Кронекера-Капелли). Фундаментальная система решений ОСЛУ. Связь между решениями СЛУ и ассоциированной ОСЛУ. Линейные многообразия.
Линейные отображения и матрицы.
Линейные отображения векторных пространств и их матрицы. Алгебраические операции над линейными отображениями и матрицами. Свойства матричных операций. Обратная матрица, алгоритм ее нахождения. Элементарные матрицы. Основное свойство элементарных матриц.
Подстановки.
Перестановки и подстановки. Свойства умножения подстановок. Циклы. Теорема о структуре подстановки. Знак перестановки и подстановки. Разложение подстановок в произведение транспозиций.
Определители.
Определители и их свойства. Метод вычисления определителей приведением к треугольному виду. Разложение определителя по строке (столбцу).
Применение теории определителей. вычисление обратной матрицы, метод Крамера решения квадратных СЛУ. Теорема о ранге матрицы в терминах определителей. Метод окаймляющих миноров.
Основные алгебраические структуры.
Группы, кольца, поля. Кольца вычетов.
Поле комплексных чисел.
Поле комплексных чисел и его определяющие свойства. Модель поля комплексных чисел, геометрическая интерпретация. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, операции. Степень и извлечение корня из комплексного числа. Группа корней из единицы.
Кольцо многочленов от одной переменной.
Кольца многочленов от одной переменной и его определяющие свойства. Модель кольца многочленов. Свойства операций над многочленами. Задача о полиномиальной интерполяции. Интерполяционная формула Лагранжа. Теорема о делении с остатком. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратности. Производная, определение кратности корня с использованием производной. Теорема Тейлора.
Теория делимости в коммутативных областях целостности.
Наибольший общий делитель. Евклидовы кольца. Основная теорема арифметики в евклидовом кольце. Факториальность кольца многочленов от одной переменной. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел и полем комплексных чисел.
Локализация корней многочлена.
Теорема Штурма.
Поле частных коммутативной области целостности.
Поле рациональных дробей от одной переменной с коэффициентами из поля. Разложение рациональной дроби на простейшие.
Кольцо многочленов от n переменных над полем.
Существование и единственность кольца многочленов от n переменных над полем с точностью до изоморфизма. Полиномиальные функции. Факториальность кольца многочленов от n переменных над полем. Лемма Гаусса.
Симметрические многочлены.
Теорема Виета. Основная теорема о симметрических многочленах. Дискриминант и результант.
Семестр 2
Векторное (линейное) пространство. Линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства,

сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Координаты, матрица перехода от одного базиса к другому.
Линейные отображения (операторы) и их структура.
Операции над линейными отображениями, матрицы линейных отображений. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения. Инвариантные подпространства. Собственные числа и векторы. Характеристический и минимальный многочлен оператора (матрицы). Жорданова форма линейного оператора (матрицы).
Билинейные (полуторалинейные) и квадратичные формы.
Изменение матрицы квадратичной (полуторалинейной) функции при изменении базиса. Методы Лагранжа и Якоби приведения симметричной (эрмитовой) билинейной формы к каноническому виду. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы.
Евклидово (унитарное) пространство. Скалярное произведение, свойства. Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства.
Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств.
Соответствие между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор. Свойства. Матрица сопряженного оператора. Инвариантные подпространства относительно сопряженного. Самосопряженные (эрмитовы) операторы и их свойства. Спектр самосопряженного оператора. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пары форм. Ортогональные (унитарные) операторы, их свойства, эквивалентные определения. Матрица ортогонального оператора, свойства собственных чисел и собственных векторов ортогонального оператора. Канонический вид ортогонального (унитарного) оператора.
Тензоры.
Сопряженное векторное пространство, двойственный базис. Определение тензора, координаты тензора. Операции над тензорами.
Семестр 3
Группы.
Определение группы, подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Гомоморфизмы групп. Ядро, образ гомоморфизма. Смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах групп.
Действие группы на множестве.
Орбиты, стабилизаторы. Формула длины орбиты. Формула разложения на орбиты. Классы сопряженных элементов, формула классов. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Центр группы.
p-группы, разрешимые и простые группы. p-группы. Теоремы Силова. Группы порядка pq. Коммутант группы. Разрешимые и простые группы.
Задание группы образующими и соотношениями.
Внешнее, внутреннее прямое произведение групп. Разложимые группы. Разложимость конечной циклической группы. Свободные группы. Универсальное свойство свободной группы. Задание группы образующими и соотношениями.
Конечные и конечнопорожденные абелевы группы.
Конечные абелевы группы. Примарные группы. Элементарные делители примарной группы. Число неизоморфных примарных групп порядка pn. Коэффициенты кручения конечной абелевой группы. Конечнопорожденные абелевы группы. Свободные абелевы группы. Ранг свободной абелевой группы. Подгруппа кручения. Коэффициенты кручения конечнопорожденной абелевой группы.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Алгебра 1 курс (математика, ФММ, МиММ), https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4485.

Иные учебно-методические материалы:
1. Золотых Н.Ю., Любимцев О.В. Необходимые требования к успешному освоению дисциплины «Алгебра» (минимально необходимый уровень) // — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. — 86 с. Постоянная ссылка на документ: http://old.lib.unn.ru/students/src/Algebra-Lyubimtsev_Zolotyh.pdf
2. Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 1: Учебно-методическое пособие. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. — 35 с.
Постоянная ссылка на документ: http://old.lib.unn.ru/students/src/KLM_The%20beginning%20of%20algebra.%20Part%201.pdf
3. Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 2: Учебно-методическое пособие. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2024. — 41 с.
Постоянная ссылка на документ: http://old.lib.unn.ru/students/010301.html
4. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Хорева Н.А., Чебочко Н.Г. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ I. Практикум. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. - 23с.
Постоянная ссылка на документ: http://www.unn.ru/books/met_files/teor_gr.pdf
5. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Чебочко Н.Г. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ II. Практикум. // Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 36с.
Постоянная ссылка на документ http://www.unn.ru/books/met_files/mulyar.pdf

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1 семестр

Вариант 1.

1. Вычислить A^{-1} с помощью элементарных преобразований матриц A и E, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Найдите X, если $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

3. Найдите ранг системы векторов и какую-либо максимальную линейно независимую подсистему системы векторов
$v_1=(2,1,-1,1,2), v_2=(3,-2,2,-3,-4), v_3=(5,1,-1,2,2), v_4=(2,-1,1,-3,-2).$

4. Исследуйте совместность и найдите общее решение системы

$$\begin{cases} -x_1-x_2+3x_3+2x_4=1 \\ -4x_1+8x_2-15x_3+7x_4=-5 \\ 2x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+3x_2-9x_3+6x_4=-3 \end{cases}$$

5. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} -x_1-x_2+3x_3+2x_4=x_5 \\ -4x_1+8x_2-15x_3+7x_4=-5x_5 \\ 2x_1-2x_2+3x_3-x_4=x_5 \\ 3x_1+3x_2-9x_3+6x_4=-3x_5 \end{cases}$$

2 семестр

2 вариант.

1. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1=\{-1,-2,2\}, a_2=\{-2,-1,1\}, a_3=\{0,-1,3\}$ в векторы $b_1=\{-4,0,1\}, b_2=\{-5,3,-1\}, b_3=\{-1,-9,7\}$ соответственно, в том же базисе, в котором заданы векторы a_i и b_i.

2. Матрица оператора φ в базисе $a_1=\{0,1\}$, $a_2=\{-1,1\}$ равна $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а матрица оператора ψ в базисе $b_1=\{-1,-3\}$, $b_2=\{-2,0\}$ равна $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ Найти матрицу оператора $\varphi\circ\psi$ в базисе, в котором даны координаты a_i и b_i.

3. Найти собственные векторы и жорданову нормальную форму линейного оператора заданного матрицей $\begin{bmatrix} -17 & 66 & -25 \\ -13 & 47 & -17 \\ -20 & 69 & -24 \end{bmatrix}$.

3 семестр

1

1. Найти порядок элемента группы:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5;\quad b)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*.$$

2. В циклической группе порядка 18 найти все элементы порядка 2.

3. Найти все гомоморфизмы $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{10}$.

4. Найти все орбиты и стабилизаторы группы G, порожденной подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 9 & 6 & 8 & 7 & 10 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

и действующей на множестве $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1 семестр

Задача 1. Вычислить $\sqrt[3]{\dfrac{(1+i)^8(-\sqrt{3}+i)^6}{(-1-i)^3}}$

Задача 2. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$$
$$g = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

Задача 4. Вычислить $2A^{-1} - BA - 3E$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Отделить кратные множители многочлена

$$f = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$$

Задача 6. Пользуясь схемой Горнера разделить $f = x^4 + 2ix^3 - x^2 - 3x + 7 + i$ с остатком на x+i и вычислить f(-i).

Задача 7. Исследовать систему на совместность в зависимости от значения параметра λ и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

2 семестр

Задача 1. Найти матрицу перехода от базиса $v_1=(1, 1, 1)$, $v_2=(1, 1, 0)$,$v_3=(-1, 0, -1)$ к базису $u_1=(1, 2, 0)$, $u_2=(2, 2, 1)$, $u_3=(2, 1, 2)$.

Задача 2. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $\langle(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle$ и $\langle(-1,-1,1,0),(2,2,0,1)\rangle$.

Задача 3. Выяснить является преобразование пространства R^3 линейным и если да, то найти его матрицу в базисе $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(-1,1,1)$, $e_3=(1,2,3)$:

А) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(3x_1-x_2,x_1+x_3,x_2-x_3)$.

Б) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_1x_2,x_3)$.

Задача 4. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $v_1=(1, 0, 1)$, $v_2=(0, 1, 1)$, $v_3=(1, 1, 0)$ в векторы $u_1=(4, 4, 5)$, $u_2=(5, 3, 4)$,$u_3=(3, 5, 3)$, соответственно.

Задача 5. Линейный оператор F задан в базисе $\{ v_1=(1, 1, 0), v_2=(0, 1, 1) ,v_3=(1,0, 1) \}$: $F(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)= 2a_1v_1+2a_2v_2-2a_3v_3$, где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора в базисе $\{v_1,v_2, v_3\}$. Найти матрицу оператора F в базисе $\{u_1, u_2, u_3\}$ и значение оператора F на векторе $u=u_1 +2u_2 +u_3$, где $u_1=(1, 1, 1)$, $u_2=(0, 1, 1)$, $u_3=(0, 0, 1)$.

Задача 6. Матрица оператора φ в базисе $a_1=(1, 1)$, $a_2=(1, 0)$ равна $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$,

матрица оператора ψ в базисе $b_1=(-1, -1)$, $b_2=(1, 2)$ равна $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\varphi+\psi$ в базисе $\{b_1, b_2\}$.

Задача 7. Найти базис ядра и образа оператора, заданного в стандартном базисе матрицей
$\begin{pmatrix}1&4&2\\1&5&3\\-1&2&4\end{pmatrix}$.

Задача 8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного матрицей $\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&2&3\\-2&0&0\end{pmatrix}$.

Задача 9. Является ли диагонализируемым линейный оператор над R , заданный в стандартном базисе матрицей $\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

Задача 10. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

Задача 11. Найти нормальный вид в области вещественных чисел и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3.$$

Задача 12. Найти канонический вид и ортогональное преобразование, приводящее f к каноническому виду (приведение к главным осям).

$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задача 13. Процессом ортогонализации Грама-Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 3, -2)$, $u_3 = (2, 1, 0)$.

Задача 14. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x=(3,1,2) на линейное подпространство L, натянутое на векторы: v_1=(1, 2, -1), v_2=(2, -2, 1).

Семестр 3.

Задача 1. В циклической группе порядка 20 найти все элементы a, такие что $a^4 = e$ и все элементы порядка 4.

Задача 2. Найти классы сопряженных элементов в группе A_4.

Задача 3. Выяснить какие из перечисленных циклических групп $< a >$, порожденных элементом $a \in G$, изоморфны:

1) $G = □^*$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$;

2) $G = □^*$, $a = \cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5}$;

3) $G = □^*$, $a = -3\pi$;

4) $G = □^*$, $a = 7 - i$;

5) $G = S_6$, $a = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)$;

6) $G = □$, $a = -310$;

7) $G = \mathrm{GL}_n(□)$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найти все силовские 3-подгруппы в S_4.

Задача 5. Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ в S_{10}.

Задача 6. Определить является отображение $f : □^* \to □^*$ гомоморфизмом групп или нет, найти ядро и образ:

a) $f(z) = |\bar{z}|^2$;

в) $f(z) = -|z|$;

c) $f(z) = 1$;

d) $f(z) = 3$.

Задача 7. Доказать изоморфизм $□^* / □^+ \cong \mathrm{T}^1$.

Задача 8. Найти централизатор подстановки (1 4 2) в S

Задача 8. Найти централизатор подстановки $(1\ 4\ 2)$ в S_4.

Задача 9. Выяснить является множество с операцией группой или нет.

Задача 10. В группе $GL_2(\mathrm{R})$ найти централизатор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 11. Найти все гомоморфные отображения $Z_9 \to Z_{36}$.

Задача 12. Доказать, что группа $G = \langle a,b \parallel a^8, b^2a^2, b^{-1}aba \rangle$ конечна.

Задача 13. Доказать, что группу S_3 можно задать следующими образующими и соотношениями: $\langle a,b \parallel a^2, b^3, a^{-1}bab^{-2} \rangle$.

Задача 14. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.

Задача 15. Найти левые и правые смежные классы в S_3 по подгруппе $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

14

Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
отлично	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.
очень хорошо	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.
хорошо	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.
удовлетворительно	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие минимальных умений решения задач . Невозможность оценить наличие умений решения задач вследствие отказа обучающегося.

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Индивидуальное устное собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1 семестр

1. Обобщенный закон ассоциативности.
2. Приведение системы линейных уравнений (матрицы) к ступенчатому виду.
3. Связь решений неоднородной системы линейных уравнений с решением соответствующей ей неоднородной.
4. Ассоциативность произведения отображений.
5. Перестановки и подстановки. Произведение подстановок. Циклы.
6. Разложение подстановок в произведение независимых циклов.
7. Определитель матрицы порядка n (определение и базовые свойства).
8. Вычисление определителя с помощью приведения его к треугольному виду. Теорема о единственности функции с базовыми свойствами определителя.
9. Лемма о фальшивом разложении.
10. Критерий определенности квадратной системы линейных уравнений. Правило Крамера.
11. Произведение линейных преобразований, его матрица.
12. Операции над матрицами, их свойства.
13. Определитель произведения матриц.
14. Способы нахождения обратной матрицы.
15. Критерий равенства определителя нулю.
16. Основная теорема о линейной зависимости. Ранг системы векторов.
17. Теорема о ранге произведения матриц.
18. Ранг системы решений однородной линейной системы уравнений.

2 семестр

1. Аксиомы линейного пространства. Следствия из аксиом. Подпространства, примеры.
2. Базис линейного пространства. Количество векторов в базисе, размерность.
3. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.
4. Факторпространства. Размерность факторпространств.
5. Изоморфизм пространств одинаковой размерности.
6. Задание матрицами линейных отображений. Матрица композиции линейных отображений.
7. Алгебра линейных операторов. Матрица линейного оператора. Примеры.
8. Критерий невырожденности линейного оператора. Полная линейная группа.
9. Собственные значения линейного оператора и корни характеристического многочлена. Инвариантность характеристического многочлена.
10. λ-матрицы, элементарные преобразования λ-матриц, эквивалентные λ-матрицы, каноническая форма.
11. Теорема о единственности канонического вида. Следствия. Инвариантные множители.
12. Критерий эквивалентности λ-матриц.
13. Критерий подобия числовых матриц.
14. Критерий подобия жордановых матриц.

15. Подстановка матрицы оператора в многочлен, аннулирование многочлена, минимальный многочлен. Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли.
16. Полуторалинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица полуторалинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.

3 семестр
1. Группа – определение и простейшие свойства. Примеры.
2. Порядок элемента группы. Порядок степени элемента группы.
3. Подгруппы циклической группы.
4. Теорема Лагранжа и ее следствия. Классификация групп порядка < 6.
5. Нормальные подгруппы. Критерий нормальности подгруппы.
6. Гомоморфизмы групп и их свойства.
7. Теорема Кэли.
8. Первая теорема о гомоморфизме.
9. Третья теорема о гомоморфизме.
10. Периодическая часть абелевой группы.

5.1.4 Типовые задания (оценочное средство - Индивидуальное устное собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1 Семестр

1. Эквивалентность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях.
2. Критерий совместности (несовместности, определенности) системы линейных уравнений по ступенчатому виду.
3. Если система линейных уравнений однородная и число уравнений меньше числа неизвестных, то имеется ненулевое решение.
4. Обратное отображение существует тогда и только тогда, когда отображение биективно.
5. Лемма о списке перестановок. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
6. Четность подстановок. Четность произведения подстановок.
7. Свойства определителя, вытекающие из базовых свойств. Определитель транспонированной матрицы.
8. Разложение определителя по строке (столбцу).
9. Теорема Лапласа.
10. Линейные преобразования и их свойства.
11. Ассоциативность произведения матриц.
12. Лемма об определителе с углом нулей.
13. Обратная матрица (критерий существования, формула ее элементов, ее определитель).
14. Линейно зависимые и линейно независимые системы в линейном пространстве строк, их свойства.
15. Максимальные линейно-независимые подсистемы.
16. Теорема о ранге матрицы.
17. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определенности системы (в терминах рангов).

2 семестр

1. Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.
2. Теорема о дополнении до базиса. Эквивалентные определения базиса.
3. Прямая сумма линейных пространств. Критерий прямой суммы.
4. Матрица перехода от одного базиса к другому. Координаты, их изменение при замене базиса.
5. Линейные отображения линейных пространств. Ядро и образ линейного отображения. Размерность ядра и образа.
6. Закон изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.
7. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Определитель и след линейного оператора.
8. Собственные векторы и собственные значения. Теорема о линейной независимости собственных векторов.
9. Критерий диагонализируемости линейного оператора.
10. Приведение λ-матрицы к каноническому виду элементарными преобразованиями.
11. Унимодулярные λ-матрицы. Свойства. Эквивалентность элементарных преобразований λ-матриц и умножения на элементарные матрицы.
12. Матричные многочлены. Деление с остатком матричных многочленов.

3 семестр

1. Подгруппы. Примеры. Пересечение подгрупп.
2. Циклические группы, примеры.
3. Смежные классы по подгруппе. Теорема о разбиении группы на смежные классы.
4. Теорема Коши.
5. Центр группы. Централизатор элемента группы.
6. Классификация циклических групп.
7. Факторгруппа по нормальной подгруппе. Канонический гомоморфизм на факторгруппу.
8. Вторая теорема о гомоморфизме.
9. Прямые суммы абелевых групп.
10. Теорема о разложении периодической абелевой группы в прямую сумму примарных компонент.
11. Структурная теорема для конечных абелевых p-групп.
12. Теорема о свободе конечнопорожденной абелевой группы без кручения.
13. Лемма о ретракте абелевых групп.

Критерии оценивания (оценочное средство - Индивидуальное устное собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрирован творческий и профессиональный подход к ответу на нестандартных вопросы.
отлично	Продемонстрированы отличные навыки при ответах на стандартные вопросы.

Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	Продемонстрированы очень хорошие навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
хорошо	Продемонстрированы хорошие навыки при ответах на стандартные вопросы.
удовлетворительно	Продемонстрированы базовые навыки при ответах на стандартные вопросы.
неудовлетворительно	При ответах на базовые вопросы имеются значительные пробелы в знаниях.
плохо	Отсутствие знаний по темам лекций.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	**плохо**	**неудовлетворительно**	**удовлетворительно**	**хорошо**	**очень хорошо**	**отлично**	**превосходно**
	не зачтено		**зачтено**				
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнен	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

				недочетами		ы все задания в полном объеме	
Навыки	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	**превосходно**	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	**неудовлетворительно**	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Системы линейных уравнений. Эквивалентные системы, свойства. Теорема об элементарных преобразованиях.
2. Приведение системы к ступенчатому виду.

3. Теоремы о совместности и определенности систем

линейных уравнений. Следствия.

4. Определители второго и третьего порядков.

Вывод правила Крамера для систем из 2-х уравнений с двумя неизвестными.

5. Перестановки, транспозиции символов в перестановке.

Теорема о расположении перестановок в ряд. Следствие.

6. Порядки, инверсии, четность перестановки. Теорема о перемене четности на противоположную при

транспозиции. Следствие.

7. Подстановки. Четность подстановки.

Произведение подстановок. Свойства произведения.

8. Транспозиции, свойства. Теорема о разложении

подстановки в произведение транспозиций. Следствия.

9. Циклы, свойства. Разложение подстановки в

произведение циклов. Теорема о декременте.

10. Определители и их свойства.

11. Миноры и алгебраические дополнения. Лемма о произведении минора на его алгебраическое дополнение.

12. Теорема Лапласа. Следствия.

13. Умножение элементов строки (столбца) на свои и

чужие алгебраические дополнения.

14. Правило Крамера для системы из уравнений с неизвестными

15. Линейные арифметические пространства.

Линейная зависимость. Свойства линейной зависимости и независимости. Линейные оболочки. Подпространства.

16. Базисы, эквивалентные определения, стандартный базис

в R^n. Лемма о линейно независимой системе, следствие.

17. Теорема о базисе. Размерность.

18. Ранг системы векторов. База системы векторов.

19. Ранг матрицы (горизонтальный, вертикальный,

минорный). Теорема о равенстве рангов матрицы и матрицы, полученной из данной перестановкой строк (столбцов).

20. Теорема о равенстве горизонтального, вертикального и минорного рангов. Следствия.

1. Аксиомы векторного пространства. Следствия из аксиом. Примеры векторных пространств. Подпространства, примеры.

2. Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.

3. Эквивалентные определения базиса, примеры.

Конечномерные, бесконечномерные пространства.

4. Лемма о линейно независимой системе. Теорема о

количестве векторов в базисе, размерность.

5. Теорема о дополнении до базиса. Свойство бесконечномерных пространств.

6. Теорема о монотонности размерности.

7. Координаты вектора в базисе, матрица перехода, ее невырожденность, формула изменения координат при переходе к новому базису.

8. База системы векторов и ранг системы векторов.

9. Сумма и пересечение подпространств, линейная оболочка объединения.

10. Теорема о размерности суммы и пересечения

подпространств

11. Прямая сумма. Критерий прямой суммы.

12. Линейные отображения векторных пространств, свойства, примеры. Матрица линейного отображения в базисах. Матричная запись. Формула преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов.

13. Матрица линейного оператора. Матричная запись. Координаты образа вектора. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса.

14. Теорема о задании линейного отображения на базисе. Теорема о соответствии между линейными отображениями и матрицами.

15. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.

16. Инъективные линейные отображения.

17. Сумма линейных отображений, произведение на число, композиция. Их матрицы.

18. Обратное отображение, его матрица. Изоморфизм векторных пространств. Теорема об изоморфизме конечномерных векторных пространств.

19. Алгебра линейных операторов. Эквивалентные условия невырожденности.

20. След матрицы, след линейного оператора.

1. Бинарная алгебраическая операция. Примеры. Теорема об обобщенной ассоциативности.

2. Определение группы, подгруппы. Эквивалентное определение подгруппы. Примеры.

3. Степени, свойства степеней. Порядок элемента. Свойства порядка.

4. Циклические группы. Теорема о порядке элемента и циклической подгруппы порожденной этим элементом. Следствия.

5. Теорема об изоморфизме циклических групп.

6. Теорема о подгруппах циклической группы.

7. Гомоморфизмы групп. Примеры. Свойства гомоморфизмов групп. Ядро, образ гомоморфизма. Изоморфизм групп.

8. Смежные классы по подгруппе (левые, правые). Примеры.

9. Индекс группы по подгруппе. Теорема Лагранжа, следствия.

10. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Каноническая проекция. Примеры.

11. Основная теорема о гомоморфизме. Следствие.
12. 1-ая теорема об изоморфизме.
13. Теорема о соответствии. Следствия.
14. Действие групп на множестве. Примеры. Эквивалентность определений действия групп на множестве.
15. Орбиты, стабилизаторы. Примеры. Сопряженность стабилизаторов элементов из одной орбиты.
16. Предложение о соответствии между элементами орбиты и множеством левых смежных классов по подгруппе. Формула длины орбиты.
17. Формула разложения на орбиты. Формула классов.
18. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Теорема Кэли.
19. Центр группы. Примеры. Свойства. Теорема о центре p-группы.
20. Порядки элементов в абелевой группе. Лемма о показателе.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Общий метод исследования совместности и решения системы линейных уравнений. Следствия для однородных систем.
3. Однородные системы уравнений. Свойства, теорема о фундаментальной системе решений.
4. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной системы.
5. Сложение и умножение матриц. Свойства сложения и умножения.
6. Определитель произведения матриц.

7. Ранг произведения матриц.
8. Обратная матрица. Определение, необходимое и достаточное условие существования.
9. Алгебраические операции. Теорема об обобщенной ассоциативности. Группы, кольца, поля.
10. Определение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма. Свойства операции сопряжения.
11. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Свойства модуля.
12. Свойства степеней. Формула Муавра. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.
13. Группа корней n-ой степени из единицы.
14. Первообразные корни.
15. Делимость целых чисел. Свойства.
16. НОД и НОК. Свойства. Алгоритм Евклида.
17. Взаимно простые числа. Свойства, критерий взаимной простоты.
18. Простые числа и их свойства. Решето Эратосфена. Теорема Евклида.
19. Основная теорема арифметики, следствия из нее.
20. Построение кольца многочленов. Степень многочлена, свойства степени. Теорема о целостности кольца многочленов.
21. Делимость в кольце многочленов. Теорема о делении с остатком. Схема Горнера.

22. НОД и НОК. Существование НОД. Алгоритм Евклида нахождения НОД.
23. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты. Свойства.
24. Неприводимые многочлены.
25. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых унитарных. Следствия.
26. Корни многочленов. Теорема Безу.
27. Кратность корня. Теорема о количестве корней многочлена. Следствия.
28. Производная многочлена. Критерий кратности корня . Связь между кратностью корня многочлена и кратностью данного корня в производной.
29. Алгебраически замкнутое поле, разложение на неприводимые над алгебраически замкнутым полем. Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены над R, разложение на неприводимые над R.
30. Комплексно сопряженные корни многочлена из R[x].
31. Неприводимые многочлены над R. Разложение на неприводимые над полем R.
32. Локализация корней. Лемма о модуле старшего члена. Следствия. Системы Штурма. Теорема Штурма. Теорема о существовании системы Штурма

1. Инвариантные подпространства, собственные векторы. Собственные значения линейного оператора и

корни характеристического многочлена.

Инвариантность характеристического многочлена.

22. Теорема о линейной независимости собственных векторов.

3. Диагонализируемость линейного оператора.

4. λ-матрицы, элементарные преобразования лямбда-матриц, эквивалентные лямбда-матрицы, каноническая форма.

5. Приведение лямбда-матрицы к каноническому виду элементарными преобразованиями.

6. Теорема о единственности канонического вида. Следствия. Инвариантные множители.

7. Унимодулярные лямбда-матрицы. Свойства. Эквивалентность элементарных преобразований лямбда-матриц и умножения на элементарные матрицы.

8. Критерий эквивалентности лямбда -матриц.

9. Деление с остатком матричных многочленов.

10. Критерий подобия матриц.

11. Канонический вид характеристических матриц для жордановых клеток.

12. Канонический вид характеристических матриц для жордановых матриц. Критерий подобия жордановых матриц.

13. Приведение матрицы к жордановой нормальной форме. Критерий диагонализируемости.

14. Жорданова форма матриц 2-го и 3-го порядков.

15. Подстановка матрицы, оператора в многочлен, аннулирование многочлена, минимальный многочлен, примеры, свойство. Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли.

16. Билинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.

17. Симметрические, кососимметрические формы. Квадратичная форма, поляризация квадратичной формы, канонический вид.
18. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
19. Ранг квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы над C. Теорема об эквивалентности квадратичных форм над C.
10. Закон инерции квадратичных форм над R.
21. Сигнатура. Теорема об эквивалентности квадратичных форм над R.
22. Метод Якоби.
23. Положительно определенные квадратичные формы. Эквивалентные определения. Критерий Сильвестра.
24. Евклидовы пространства, скалярное произведение, свойства. Длина вектора, неравенство Коши-Буняковского, следствия, угол между векторами.
25. Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в о.н.б. Матрица Грама.
26. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
27. Существование о.н.б. Дополнение до о.н.б.
28. Ортогональное дополнение подпространства. Свойства.
29. Теорема об ортогональном дополнении, следствие. Ортогональные проекции, расстояния.
30. Изоморфизм евклидовых пространств.
31. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.
32. Теорема о соответствии между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве. Следствия.
33. Сопряженный оператор. Свойства. Матрица сопряженного оператора. Инвариантные подпространства относительно сопряженного.
34. Симметрические операторы и их свойства. Теорема об ортогональности собственных векторов симметрического оператора.
35. Теорема о спектре симметрического оператора.

36. Критерий симметрического оператора.

37. Теорема о диагонализируемости симметричной матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям.

38. Ортогональные операторы, их свойства, эквивалентные определения.

39. Матрица ортогонального оператора, свойства собственных чисел и собственных векторов ортогонального оператора.

40. Лемма о комплексном характеристическом корне ортогонального оператора, следствие.

41. Теорема об инвариантных подпространствах ортогонального оператора.

42. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора.

43. Унитарные пространства.

44. Двойственное пространство. Однозначность определения линейной функции на базисе.

45. Теорема о двойственном базисе, следствие. Канонический изоморфизм в евклидовом пространстве.

46. Канонический изоморфизм между пространством и дважды сопряженным.

47. Матрица перехода в двойственных базисах. Законы изменения координат векторов и ковекторов в тензорных обозначениях.

48. Тензоры. Координаты тензора. Закон изменения координат тензора.

49. Операции над тензорами.

50. Разложимые тензоры.

1. Теорема Коши. Силовские подгруппы. Теоремы Силова. Следствие.

2. Свойства коммутанта. Примеры.

3. Разрешимые группы. Примеры. Свойства разрешимых групп.

4. Теорема о разрешимости p-группы. Группа порядка p^2.

5. Внешнее, внутреннее прямое произведение. Теорема об эквивалентности определений внутреннего произведения групп.
6. Теорема о порядке произведения.
7. Следствие теоремы о порядке произведения. Теорема о разложимости циклической группы.
8. Теорема о разложении группы в прямую сумму силовских нормальных подгрупп.
9. Теорема о факторгруппе произведения.
10. Абелевы группы. Примарная подгруппа. Теорема о разложении в прямую сумму примарных подгрупп.
11. Лемма о представителе. Теорема о разложении примарной группы.
12. Теорема о единственности разложения примарной группы.
13. Элементарные делители примарной группы. Теорема об изоморфизме примарных групп. Число неизоморфных примарных групп порядка p^n.
14. Коэффициенты кручения. Основная теорема о конечных абелевых группах.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок.
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

2.2 Задания (оценочные средства), выносимые на экзамен

Семестр 1.

1. Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$
2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить $\sqrt[3]{2-2i}$
4. Решить уравнение $z^3 = -i$.
5. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$
6. Решить уравнение $(1-i)\bar{z} - 3iz = 2 - i$.
7. Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$

10. Найдите общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

11. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z+i| = 3$.

13. Пусть F – подполе поля K, $f(x) \in F[x]$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если *f(x)* приводим над *F*, то *f(x)* приводи над *K*;
б) если *f(x)* приводим над *K*, то *f(x)* приводи над *F*;
в) если *f(x)* неприводим над *F*, то *f(x)* неприводим над *K*;
г) если *f(x)* неприводим над *K*, то *f(x)* неприводим над *F*.

Привести соответствующие примеры.

14. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x) = x^5$ по степеням $x - 1$.

15. Выполните деление с остатком $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$, используя схему Горнера.

16. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Чему равен показатель кратности корня –2 для многочлена
$X^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

Семестр 2.

1. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы векторов:
$a_1 = (1, 2, 1, 3)$, $a_2 = (1, 1, 1, 3)$, $a_3 = (1, 0, 1, 3)$.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств 3-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов
$a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (4, 3, 1)$, $a_3 = (2, -1, -5)$ и $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (-3, 2, 0)$.

3. Выяснить является преобразование пространства R^3 линейным и если да, то найти его матрицу в базисе $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,1,1)$, $e_3 = (1,2,3)$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$$

4. Линейное преобразование *n*-мерного линейного пространства *V* задано матрицей *A* в базисе ***e***. Число *n* определяется порядком матрицы. Найти ядро и множество значений преобразования. Выяснить, является ли оно изоморфизмом, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Матрицы A и B составлены из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ трехмерного линейного пространства V. проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пространства V, переводящее векторы a_i в b_i (i = 1, 2, 3). Вычислить матрицу преобразования в базисе $\boldsymbol{e}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Матрицы A и B составлены из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ трехмерного линейного пространства V. проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пространства V, переводящее векторы a_i в b_i (i = 1, 2, 3). Вычислить матрицу преобразования в базисе a_1, a_2, a_3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Линейное преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\psi \circ \varphi$ в исходном базисе.

9. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Линейное преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\psi \circ \varphi$ в базисе a_1, a_2, a_3.

10. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Линейное

преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\psi \circ \varphi$ в базисе b_1, b_2, b_3.

11. Линейное преобразование вещественного 3-мерного линейного пространства задано своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования.

12. Линейное преобразование вещественного 3-мерного линейного пространства задано своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования.

13. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

14. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

15. Найти методом Лагранжа нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду квадратичную форму $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$. Определить ранг, положительный и отрицательный индексы инерции этой формы.

16. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам $a_1 = (4, 0, 4)$, $a_2 = (2, 6, 5)$, базис ортонормированный.

17. Построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов
$<(1, 3, 1), (5, 1, 3), (1, 6, -8)>$.

18. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ преобразования φ в базисе *{e}* с матрицей Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*.

19. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением преобразование φ переводит векторы $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 2)$ в векторы $b_1 = (2, 0, -1)$,
$b_2 = (1, -2, 1)$, $b_3 = (0, 1, 2)$. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*.

20. Квадратичная функция $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$ записана в ортонормированном базисе 2-мерного евклидового пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид и записать этот диагональный вид.

Семестр 3.

1. Найти левые и правые смежные классы в S_3 по подгруппе $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2. Доказать, что отображение $\varphi: C^* \to R^*$, $\varphi(z) = |z|$ является гомоморфизмом групп, найти его ядро и образ.

3. Вычислить τ^k, если $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $k = 25$.

4. Доказать, что среди групп порядка 30 нет простых групп.

5. Найдите порядок каждого элемента в группе обратимых элементов $U(Z_6)$ кольца вычетов Z_6. Будет ли группа $U(Z_6)$ циклической группой?

6. Является ли множество $\{\sigma \in S_n: \sigma(2) = 2\}$
    1) подгруппой группы S_n?
    1) подгруппой группы S_n?
    2) нормальной подгруппой группы S_n?

7. В циклической подгруппе порядка 15 найти все элементы a, такие что $a^5 = e$ и все элементы порядка 5.

8. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.

9. Изоморфны ли группы: $Z_{12} \oplus Z_{36}$ и $Z_{18} \oplus Z_{24}$?

10. Найти все подгруппы циклической группы порядка 16.

11. Найти все силовские 3-подгруппы в A_4.

12. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.

13. Доказать, что $R^* / R^+ \cong S_n / A_n$.

14. Найти в группе Z_{20} подгруппу, порожденную элементом $\bar{5}$.

15. Найти классы сопряженных элементов в группе A_4.

16. Найти во множестве {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} все орбиты и все стационарные подгруппы группы G, порожденной подстановкой (1234)(67).

17. Образуют ли группу целочисленные квадратные матрицы порядка n с определителями 1?

18. Образуют ли группу множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $(x, y \in R)$ относительно

умножения?

19. Найти смежные классы аддитивной группы Z по подгруппе 4Z.

20. Найти коммутант и факторгруппу по коммутанту группы S_3.

21. Найти коммутатор невырожденных матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.

Задания повышенной сложности в раздел «Типовые задания (Задачи - Экзамен)» для оценки сформированности компетенции УК-1 :

1*. Выяснить как меняется разложение подстановки в произведение независимых циклов при умножении ее на некоторую транспозицию.
2*. Доказать, что если две линейные функции на векторном пространстве имеют одинаковые ядра, то они различаются линейным множителем.
3*. Доказать, что любая силовская подгруппа прямого произведения конечных групп является произведением силовских подгрупп сомножителей.

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

2.2 Задания (оценочные средства), выносимые на экзамен

Семестр 1.

1. Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$
2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить $\sqrt[3]{2-2i}$
4. Решить уравнение $z^3 = -i$.
5. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$
6. Решить уравнение $(1-i)\bar{z} - 3iz = 2 - i$.
7. Решить СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$

10. Найдите общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

11. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z + i| = 3$.

13. Пусть F – подполе поля K, $f(x) \in F[x]$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если *f(x)* приводим над *F*, то *f(x)* приводи над *K*;

б) если *f(x)* приводим над *K*, то *f(x)* приводи над *F*;

в) если *f(x)* неприводим над *F*, то *f(x)* неприводим над *K*;

г) если *f(x)* неприводим над *K*, то *f(x)* неприводим над *F*.

Привести соответствующие примеры.

14. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x) = x^5$ по степеням $x - 1$.

15. Выполните деление с остатком $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$, используя схему Горнера.

16. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Чему равен показатель кратности корня –2 для многочлена $X^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

Семестр 2.

1. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы векторов:
a₁ = (1, 2, 1, 3), *a₂* = (1, 1, 1, 3), *a₃* = (1, 0, 1, 3).

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств 3-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов
$a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (4, 3, 1)$, $a_3 = (2, -1, -5)$ и $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (-3, 2, 0)$.

3. Выяснить является преобразование пространства R^3 линейным и если да, то найти его матрицу в базисе $e_1 = (1,1,1), e_2 = (-1,1,1), e_3 = (1,2,3)$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$$

4. Линейное преобразование *n*-мерного линейного пространства *V* задано матрицей *A* в базисе ***e***. Число *n* определяется порядком матрицы. Найти ядро и множество значений преобразования. Выяснить, является ли оно изоморфизмом, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Матрицы A и B составлены из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ трехмерного линейного пространства V. проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пространства V, переводящее векторы a_i в b_i

(i = 1, 2, 3). Вычислить матрицу преобразования в базисе $\boldsymbol{e}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Матрицы A и B составлены из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ трехмерного линейного пространства V. проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пространства V, переводящее векторы a_i в b_i

(i = 1, 2, 3). Вычислить матрицу преобразования в базисе a_1, a_2, a_3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

---

8. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Линейное преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\psi \circ \varphi$ в исходном базисе.

9. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Линейное преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\psi \circ \varphi$ в базисе a_1, a_2, a_3.

10. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Линейное

преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\psi \circ \varphi$ в базисе b_1, b_2, b_3.

11. Линейное преобразование вещественного 3-мерного линейного пространства задано своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования.
12. Линейное преобразование вещественного 3-мерного линейного пространства задано своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования.
13. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.
14. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

15. Найти методом Лагранжа нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду квадратичную форму $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$. Определить ранг, положительный и отрицательный индексы инерции этой формы.
16. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам $a_1 = (4, 0, 4)$, $a_2 = (2, 6, 5)$, базис ортонормированный.
17. Построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $<(1, 3, 1), (5, 1, 3), (1, 6, -8)>$.
18. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ преобразования φ в базисе $\{e\}$ с матрицей Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*.
19. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением преобразование φ переводит векторы $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 2)$ в векторы $b_1 = (2, 0, -1)$,
$b_2 = (1, -2, 1)$, $b_3 = (0, 1, 2)$. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*.

20. Квадратичная функция $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$ записана в ортонормированном базисе 2-мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид и записать этот диагональный вид.

Семестр 3.

1. Найти левые и правые смежные классы в S_3 по подгруппе $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2. Доказать, что отображение $\varphi: C^* \to R^*$, $\varphi(z) = |z|$ является гомоморфизмом групп, найти его ядро и образ.

3. Вычислить τ^k, если $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $k = 25$.

4. Доказать, что среди групп порядка 30 нет простых групп.

5. Найдите порядок каждого элемента в группе обратимых элементов $U(Z_6)$ кольца вычетов Z_6. Будет ли группа $U(Z_6)$ циклической группой?

6. Является ли множество $\{\sigma \in S_n: \sigma(2) = 2\}$
   1) подгруппой группы S_n?
   1) подгруппой группы S_n?
   2) нормальной подгруппой группы S_n?

7. В циклической подгруппе порядка 15 найти все элементы a, такие что $a^5 = e$ и все элементы порядка 5.

8. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.

9. Изоморфны ли группы: $Z_{12} \oplus Z_{36}$ и $Z_{18} \oplus Z_{24}$?

10. Найти все подгруппы циклической группы порядка 16.

11. Найти все силовские 3-подгруппы в A_4.

12. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.

13. Доказать, что $R^* / R^+ \cong S_n / A_n$.

14. Найти в группе Z_{20} подгруппу, порожденную элементом $\bar{5}$.

15. Найти классы сопряженных элементов в группе A_4.

16. Найти во множестве {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} все орбиты и все стационарные подгруппы группы G, порожденной подстановкой (1234)(67).

17. Образуют ли группу целочисленные квадратные матрицы порядка n с определителями 1?

18. Образуют ли группу множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $(x, y \in R)$ относительно

[illegible]

умножения?

19. Найти смежные классы аддитивной группы Z по подгруппе 4Z.

20. Найти коммутант и факторгруппу по коммутанту группы S_3.

21. Найти коммутатор невырожденных матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.

Задания повышенной сложности в раздел «Типовые задания (Задачи - Экзамен)» для оценки сформированности компетенции ОПК-1 :

1*. Доказать, что ранг суммы двух матриц не превосходит суммы рангов этих матриц.
2*. Доказать, что определитель целочисленной кососимметрической матрицы является квадратом целого числа.
3*. Доказать, что все силовские подгруппы порядка 100 коммутативны.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач .
отлично	Продемонстрированы профессиональные навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
очень хорошо	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
хорошо	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами
удовлетворительно	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков решения задач вследствие отказа обучающегося от ответа

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кострикин Алексей Иванович. Введение в алгебру : учеб. для вузов. Ч. 1. Основы алгебры. - М. : Физматлит, 2000. - 272 с. - ISBN 5-9221-0017-3 : 70.00., 1 экз.
2. Кострикин Алексей Иванович. Введение в алгебру : учеб. для вузов. Ч. 2. Линейная алгебра. - М. : Физматлит, 2000. - 368 с. - ISBN 5-9221-0018-1 : 70.00., 1 экз.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры. - 2-е изд., испр. - 2001. - 272 с. - ISBN 5-9221-0166-8 : 117.32., 33 экз.
4. Курош Александр Геннадиевич. Курс высшей алгебры : учеб. для ун-тов. - 10-е изд., стер. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. - 432 с. - 0.90., 40 экз.
5. Проскуряков Игорь Владимирович. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие. - Изд. 13-е, стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2010. - 480 с. - (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классические задачники и практикумы). - ISBN 978-5-8114-0707-1 : 537.68., 21 экз.

Дополнительная литература:

1. Винберг Эрнест Борисович. Курс алгебры. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Факториал Пресс, 2001. - 544 с. - (Университетский учебник). - ISBN 5-88688-050-X : 232.00., 1 экз.
2. Туганбаев А. А. Основы высшей математики / Туганбаев А. А. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 496 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-1189-4., https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799749&idb=0.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Алгебра 1 курс (математика, ФММ, МиММ)»
https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4485
«Алгебра 2 курс (математика)»
https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4486
созданные в системе электронного обучения ННГУ - https://e-learning.unn.ru/.
http://www.lib.unn.ru/
Университетская библиотека ONLINE http://www.biblioclub.ru
Библиотека "Лань" http://e.lanbook.com/

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Любимцев Олег Владимирович, доктор физико-математических наук.

Рецензент(ы): Титова Елена Борисовна.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.