

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
от 30.11.2022 г. протокол № 13

**Рабочая программа дисциплины**

**Современные методы математической физики**

Уровень высшего образования  
**магистратура**

Направление подготовки  
**01.04.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность образовательной программы  
**Математическое моделирование физико-механических процессов**

Квалификация (степень)  
**магистр**

Форма обучения  
**очная**

Нижний Новгород

2023

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части. Код (Б1.О.05).

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина <b>Б1.О.05</b> , Современные методы математической физики относится к обязательной части ООП направления подготовки направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

## 2. Планируемые результаты обучения

соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине ), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1. Знает основные математические методы решения прикладных задач.	<b>Знать</b> основные классы дифференциальных уравнений в частных производных, используемых в естественных науках, классические математические модели, применяемые в естественных науках	Задача (практическое задание)
	ОПК-2.3. Имеет навыки разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности.	<b>Владеть</b> опытом создания новых математических моделей, опытом исследования корректности этих моделей	Задача (практическое задание), контрольная работа

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

<b>Общая трудоемкость</b>	<b>6 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>216</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>66</b>
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>114</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего, час.	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них				Самостоятельная работа, час.
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Уравнения математической физики	8	2	2		4	4
2. Пробные и обобщённые функции	12	2	2		4	8
3. Дифференцирование обобщённых функций	12	2	2		4	8
4. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций	12	2	2		4	8
5. Обобщённые функции медленного роста	12	2	2		4	8
6. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста	12	2	2		4	8
7. Обобщённые решения линейных дифференциальных уравнений	12	2	2		4	8
8. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений ( $L_2$ -теория)	12	2	2		4	8
9. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида	12	2	2		4	8
10. Задачи на собственные значения и собственные функции для основных краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида	12	2	2		4	8
11. Гладкость обобщённых решений	12	2	2		4	8
12. Классические решения уравнений Лапласа и Пуассона	12	2	2		4	8
13. Обобщённые решения смешанных задач для волнового уравнения	16	4	4		8	8
14. Обобщённые решения смешанных задач для параболических уравнений.	12	2	2		4	8
15. Смешанные задачи для системы уравнений Максвелла.	10	2	2		4	6
Текущий контроль	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен	36					
<b>Итого</b>	<b>216</b>	<b>32</b>	<b>32</b>		<b>66</b>	<b>114</b>

Практические занятия (семинарские занятия) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

На проведение практических занятий (семинарских занятий) в форме практической подготовки отводится 32 часа.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: создания новых математических моделей, опытом исследования корректности этих моделей .
- компетенций - ОПК-2.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

### 3.3. Темы, изучаемые на занятиях лекционного и семинарского типа

1. Уравнения математической физики. Уравнение колебаний, уравнения диффузии и теплопроводности (стационарные и нестационарные). Системы уравнений Максвелла в различных приближениях (электростатика, магнитостатика, квазистационарные электрические и магнитные приближения, полная нестационарная система).
2. Пробные и обобщённые функции. Полнота пространства обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Линейная замена в обобщённых функциях.
3. Дифференцирование обобщённых функций. Свойства обобщённых производных. Первообразная обобщённой функции.
4. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций. Свойства прямого произведения. Свойства свёртки. Регуляризация обобщённых функций.
5. Обобщённые функции медленного роста. Обобщённые функции с точечными носителями.
6. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста. Свойства преобразования Фурье.
7. Обобщённые решения линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения. Фундаментальные решения оператора теплопроводности, волнового оператора, оператора Лапласа, Гельмгольца. Фундаментальное решение оператора переноса.
8. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений ( $L_2$ -теория). Теорема существования решения произвольного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Корректные задачи.
9. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Предварительные сведения из теории гильбертовых пространств. Пространства Соболева. Теорема о полноте пространств Соболева. Следы функций. Обобщённые формулировки основных краевых задач и вариационные принципы.
10. Задачи на собственные значения и собственные функции для основных краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Свойства разрешающего оператора вспомогательной задачи (ограниченность, самосопряжённость, вполне непрерывность). Применение теоремы Гильберта-Шмидта к задачам на собственные значения и собственные функции.
11. Гладкость обобщённых решений. Классические решения.
12. Классические решения уравнений Лапласа и Пуассона. Гармонические функции.
13. Обобщённые решения смешанных задач для волнового уравнения. Обобщённая формулировка смешанных задач для гиперболических уравнений. Теоремы о существовании и единственности обобщённого решения смешанных задач.
14. Обобщённые решения смешанных задач для параболических уравнений. Обобщённые формулировки задач и теоремы о существовании и единственности решения. Метод Галёркина.
15. Смешанные задачи для системы уравнений Максвелла. Формулировка основных задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и для системы уравнений Максвелла в квазистационарных и стационарных приближениях. Пространства вектор-функций. Энергетические неравенства и теоремы о существовании и единственности решений основных краевых задач для системы уравнений Максвелла в стационарном приближении.

16. Краевые и смешанные задачи для стационарной и нестационарной задачи Стокса. Теоремы существования и единственности обобщённого решения. Метод Галёркина.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности.

##### 4.1. Виды самостоятельной работы

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы:

- работа над основной и дополнительной литературой;
- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение домашних практических заданий (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

##### 4.2. Задания для самостоятельной работы

1. Уравнения механики сплошных сред (уравнения газо- гидродинамики и задача Стокса, уравнения теории упругости).
2. Линейная замена в обобщённых функциях.
3. Дифференцирование обобщённых функций. Первообразная обобщённой функции.
4. Регуляризация обобщённых функций.
5. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций медленного роста.
6. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.
7. Задача Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.
8. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений (L2-теория). Теорема существования решения произвольного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Корректные задачи.
9. Теоремы о существовании и единственности решений основных краевых задач. Свойства разрешающих операторов.
10. Свойства разрешающего оператора вспомогательной задачи. Гладкость обобщённых собственных функций.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Индикаторы компетенции	Оценка сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
Знания	отсутствие знаний материала	наличие грубых ошибок в основном материале	знание основного материала с рядом негрубых ошибок	знание основного материала с рядом заметных погрешностей	знание основного материала с незначительными погрешностями	знание основного материала без ошибок и погрешностей	знание основного и дополнительного материала без ошибок
Умения	полное отсутствие	недостаточно	умение использовать	умение использовать	умение использовать	умение использовать	умение использовать

	ствие умений	умений	пользовать отдельные приемы при наличии существенных ошибок	зовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок	пользовать отдельные приемы	пользовать приемы	пользовать приемы и способность принимать решение на этой основе
Навыки	полное отсутствие навыков	отсутствие навыков	наличие минимальных навыков	посредственное владение навыками	достаточное владение навыками	хорошее владение навыками	всестороннее владение навыками

#### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций, и контроля сформированности компетенций

### 5.2.1. Примеры задач (практических заданий) для текущего контроля

1. Доказать неравенство Фридрихса для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ .	ОПК-2
2. Вычислить производные порядка 1,2 функции $y =  x  \sin x$ .	ОПК-2
3. Установить, что смешанная обобщённая производная не зависит от порядка дифференцирования.	ОПК-2

### 5.2.2. Примеры вопросов, выносимых на экзамен

1. Лебеговы пространства $L_p$ и их свойства.	ОПК-2
2. Пространства Соболева $W_p$ .	ОПК-2
3. Полнота пространства $W_2$ .	ОПК-2

### 5.2.3. Примеры задач (практических заданий), выносимых на экзамен

<p>1. Пусть в области <math>\Omega</math> рассматривается задача</p> $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(\vec{x})u = f(\vec{x}), \quad u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega,$ <p>где <math>p \in C^1(\overline{\Omega})</math>, <math>p(\vec{x}) \geq p_0 &gt; 0</math>, <math>\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n</math>, <math>q \in C(\overline{\Omega})</math>, <math>f \in L_2(\Omega)</math>.</p> <p>Сформулировать обобщённую постановку задачи и соответствующую вариационную задачу.</p>	ОПК-2
---	-------

2. Доказать, $y = \operatorname{sgn} x \notin H^1(-1,1)$ .	ОПК-2
3. Показать, что в пространствах $H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega)$ и $H(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K_0(\operatorname{div}; \Omega)$ можно ввести скалярное произведение формулой $(\vec{u}, \vec{v})_0 = (\operatorname{rot} \vec{u}, \operatorname{rot} \vec{v})_{2, \Omega}$	ОПК-2

#### 5.2.4. Пример экзаменационного билета

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Институт информационных технологий, математики и механики  
Кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

Дисциплина Современные методы математической физики

#### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1.

1. Пространства Соболева  $W_p$ .
2. Теорема о существовании и единственности решения задачи Ньютона.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Калинин А.В.

Экзаменатор \_\_\_\_\_ Калинин А.В.

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### 6.1. Основная литература

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966 (djvu) .  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
2. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977 (djvu) .  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
3. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Введение в современные методы математической физики: Эл. учебное пособие. ННГУ. 2014. 120 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Пер. № 864.14.06)
4. Жидков А.А., Калинин А.В., Тюхтина А.А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными. Эл. уч.-мет. пособие. ННГУ. 2012. 82 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Пер. № 488.12.06)

#### 6.2. Дополнительная литература

5. Калинин А.В., Дерендяев Н.В. Проекционный метод Фурье. Эл. уч.-мет. пособие. ННГУ. 2012. 75 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Пер. № 523.12.08)
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа (2-е изд.). М.: Наука, 1973 (djvu) .  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
8. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976 (djvu) . <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>

### **6.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Автор профессор А.В. Калинин

Рецензент

Заведующий кафедрой А.В.Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30.11.2022 года, протокол № 3.