

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Качественная теория динамических систем

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.01.02 Качественная теория динамических систем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-6: Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	<p>ПК-6.1: Знает специфику научных обзоров</p> <p>ПК-6.2: Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию</p> <p>ПК-6.3: Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований</p>	<p>ПК-6.1: Знать основные понятия качественной теории и теории бифуркаций двумерных динамических систем.</p> <p>ПК-6.2: Уметь проводить полное качественное исследование двумерных динамических систем, сочетая аналитические методы с численными результатами, полученными на компьютере и составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию.</p> <p>ПК-6.3: Владеть математическим аппаратом качественной теории и теории бифуркаций двумерных динамических систем и способностью составить научный обзор, реферат и отчет по тематике проводимых исследований.</p>	Задачи	<p>Экзамен:</p> <p>Контрольные вопросы</p> <p>Задачи</p>

--	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>22</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Основные понятия качественной теории автономных динамических систем на плоскости.	6	4	0	4	2
Тема 2. Качественная структура окрестностей простых и сложных состояний равновесия и предельных циклов.	38	20	8	28	10
Тема 3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.	26	8	8	16	10
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	108	32	16	50	22

#### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Основные понятия качественной теории автономных динамических систем на плоскости. Понятие динамической системы. Автономная динамическая система на плоскости. Дуга и цикл без контакта. Понятие о количественном и качественном исследовании динамических систем. Качественная структура динамической системы. Основная задача качественной теории динамических систем. Особые

и неособые полутраектории и траектории. Ячейки динамической системы.

Тема 2. Качественная структура окрестностей простых и сложных состояний равновесия и предельных циклов.

Простые и сложные состояния равновесия автономных динамических систем на плоскости. Приведение динамической системы к каноническому виду.

Простые состояния равновесия с отличными от нуля действительными частями корней

характеристического уравнения. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия. Топологическая (качественная) структура окрестностей простых состояний равновесия.

Состояния равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Проблема различения центра и фокуса. Ляпуновские величины.

Теорема Ляпунова о необходимом и достаточном условии наличия центра.

Направления, в которых траектории стремятся к сложным изолированным состояниям равновесия.

Топологическая структура некоторых сложных состояний равновесия.

Замкнутые фазовые траектории. Предельные циклы. Орбитальная устойчивость.

Поведение траекторий ДС в бесконечно удаленной части плоскости. Преобразование Бендиксона.

Преобразования Пуанкаре.

Теория индексов Пуанкаре.

Метод точечных преобразований. Неподвижные точки. Устойчивость неподвижной точки и ее связь с устойчивостью предельного цикла. Диаграмма Ламерея. Теорема Кёнигса об устойчивости неподвижной точки точечного преобразования отрезка без контакта в себя.

Построение функции последования в окрестности замкнутой траектории. Характеристический показатель предельного цикла.

Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий (Дюлака для односвязной области, Бендиксона, Дюлака для кольцеобразной области).

Топологическая система кривых Пуанкаре.

Тема 3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.

Определение грубой динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости системы.

Негрубые динамической системы. Системы первой степени негрубости. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости.

Консервативные системы на плоскости и их свойства.

Бифуркации динамических систем. Определение бифуркации. Простейшие бифуркации. Зависимость динамической системы от параметров. Определение бифуркационного значения параметра. Некоторые примеры смены качественных структур при изменении параметра. Зависимость динамической системы от двух и более параметров. Определение бифуркационной кривой.

Седло-узловая бифуркация. Бифуркация Андронова–Хопфа, понятия «безопасной» и «опасной» области устойчивости состояния равновесия («мягкое» и «жесткое» возбуждения периодических колебаний).

Бифуркация двукратного предельного цикла. Бифуркация петли сепаратрис седла.

Особенности качественной структуры и бифуркаций динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью. Цилиндрическая фазовая поверхность и возможные виды траекторий. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Особенности бифуркаций на цилиндре.

Примеры полного качественного исследования динамических систем.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Качественная теория двумерных ДС (МАТЕМАТИКА 3к)" (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=6852>).

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

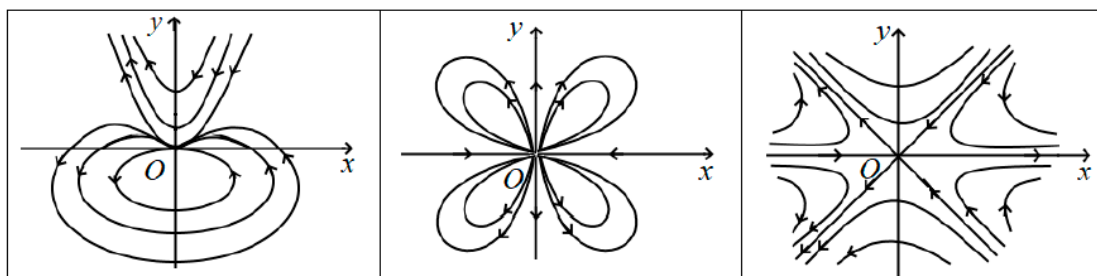
### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

Определить тип состояния равновесия  $O(0,0)$  системы

$$\frac{dx}{dt} = -y + 2x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + xy.$$

Определить индексы сложных особых точек, представленных на рисунках



Доказать, что система не является автоколебательной

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно».
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично».
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо».
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена

Оценка	Критерии оценивания
	дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо».
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно».
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо».
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо».

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными недочетами, выполнен	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

				недочетами		ы все задания в полном объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

1. Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Понятия фазового пространства, траектории. Типы траекторий динамических систем.
2. Понятие о количественном и качественном исследовании динамических систем. Качественная структура динамической системы. Основная задача качественной теории динамических систем.
3. Особые и неособые полутраектории и траектории. Ячейки динамической системы.

4. Простые и сложные состояния равновесия автономных динамических систем на плоскости. Приведение динамической системы к каноническому виду.
5. Простые состояния равновесия с отличными от нуля действительными частями корней характеристического уравнения. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия. Топологическая (качественная) структура окрестностей простых состояний равновесия.
6. Состояния равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Проблема различения центра и фокуса. Ляпуновские величины.
7. Теорема Ляпунова о необходимом и достаточном условии наличия центра.
8. Направления, в которых траектории стремятся к сложным изолированным состояниям равновесия. Топологическая структура некоторых сложных состояний равновесия.
9. Замкнутые фазовые траектории. Предельные циклы. Орбитальная устойчивость.
10. Поведение траекторий ДС в бесконечно удаленной части плоскости. Преобразование Бендиксона. Преобразования Пуанкаре.
11. Теория индексов Пуанкаре.
12. Метод точечных преобразований. Неподвижные точки. Устойчивость неподвижной точки и ее связь с устойчивостью предельного цикла. Диаграмма Ламерея. Теорема Кёнигса об устойчивости неподвижной точки точечного преобразования отрезка без контакта в себя.
13. Построение функции последования в окрестности замкнутой траектории. Характеристический показатель предельного цикла. Простые и сложные предельные циклы.
14. Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий (Дюлака для односвязной области, Бендиксона, Дюлака для кольцеобразной области).
15. Топологическая система кривых Пуанкаре.
16. Определение грубой динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости системы.
17. Негрубые динамической системы. Системы первой степени негрубости. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости.
18. Консервативные системы на плоскости и их свойства.
19. Бифуркации динамических систем. Определение бифуркации. Простейшие бифуркации.
20. Зависимость динамической системы от параметров. Определение бифуркационного значения параметра. Некоторые примеры смены качественных структур при изменении параметра. Зависимость динамической системы от двух и более параметров. Определение бифуркационной кривой.
21. Седло-узловая бифуркация.
22. Бифуркация Андронова–Хопфа, понятия «безопасной» и «опасной» области устойчивости состояния равновесия («мягкое» и «жесткое» возбуждения периодических колебаний).
23. Бифуркация двукратного предельного цикла.
24. Бифуркация петли сепаратрис седла.
25. Особенности качественной структуры и бифуркаций динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью. Цилиндрическая фазовая поверхность и возможные виды траекторий. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Особенности бифуркаций на цилиндре.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.



Оценка	Критерии оценивания
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок.
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа.

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-6

Провести качественный анализ системы при различных значениях параметра  $\mu$ . Найти бифуркационное значение параметра  $\mu$ . Определить тип бифуркации.

$$\frac{dx}{dt} = -y + 2x^2 - \mu(x + xy), \quad \frac{dy}{dt} = x + xy + \mu(-y + 2x^2).$$

Провести полное качественное исследование динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = x((x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) - 4y^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = y((x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) + 4x^2)$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продemonстрирована способность решения стандартных задач и широкого круга нестандартных задач.
отлично	Продemonстрирована способность решения стандартных и некоторых нестандартных задач.
очень хорошо	Продemonстрирована способность решения всех стандартных задач без

Оценка	Критерии оценивания
	ошибок и погрешностей.
хорошо	Продemonстрирована способность решения всех стандартных задач с незначительными погрешностями.
удовлетворительно	Продemonстрирована способность решения основных стандартных задач с негрубыми ошибками.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продemonстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие способности решения стандартных задач.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Андронов А. А. Теория колебаний / перераб. и доп. Н. А. Железцова. - М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. - 915 с. - 70.00., 58 экз.
2. Баутин Николай Николаевич. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1976. - 496 с. : ил. - (Справочная математическая библиотека). - Загл. корешка: Качественное исследование динамических систем. - 1.73., 18 экз.
3. Горяченко Вадим Демьянович. Элементы теории колебаний : учеб. пособие для студентов вузов. - Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1995. - 430 с. - ISBN 5-7470-0127-2 : 10000.00., 389 экз.
4. Некоркин Владимир Исаакович. Лекции по основам теории колебаний : учеб. пособие для студентов ННГУ, специализирующихся в области радиофизики, приклад. математики и мат. моделирования / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 311 с. - ISBN 978-5-91326-230-1 : 162.13., 148 экз.

Дополнительная литература:

1. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1967. - 487 с. : черт. - 2.58., 53 экз.
2. Качественная теория динамических систем второго порядка. - М. : Наука, 1966. - 568 с. : черт. - 2.56., 69 экз.
3. Драгунов Тимофей Николаевич. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем : учебное пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2007. - 102 с. - В надзаг.: Приоритетный нац. проект "Образование". Инновац. образоват. программа Нижегор. ун-та: Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение". - ISBN 978-5-91326-010-9 : 15.00., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Программа WInSet (Драгунов Т.Н., Морозов А.Д. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем : учебное пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2007).

#### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Костромина Ольга Сергеевна, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.