

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

## **Рабочая программа дисциплины**

Группы и алгебры Ли

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Направление подготовки / специальность  
01.03.01 Математика

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

Форма обучения  
очная

Нижегород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к вариативной части Б1.В.ДВ.04.01.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.04.01 «Группы и алгебры Ли» относится к части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-6. Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	ПК-6.1. Знает специфику научных обзоров.	<b>Знать:</b>  Основные понятия тематики, связанной с алгебрами Ли, и на базе этого может подготовить научный обзор.	Контрольная работа
	ПК-6.2. Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию.	<b>Уметь:</b> Проводить исследования алгебр Ли, сочетая аналитические методы с численными результатами, полученными на компьютере и составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию.	Контрольная работа
	ПК-6.3. Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований.	<b>Владеть:</b> Математическим аппаратом алгебр Ли и способен составить научный обзор, реферат и отчет по тематике проводимых исследований.	Контрольная работа

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	<u>2</u> ЗЕТ
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация – зачет	

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)			в том числе															Самостоятельная работа обучающегося, часы		
				Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы																	
				из них																	
	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Всего											
Очная			Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная				
Тема 1. Гладкие многообразия	15			6								6			9						
Тема 2. Группы Ли	20			10								10			10						
Тема 3. Алгебры Ли	20			10								10			10						
Тема 4. Соответствие Ли	16			6								6			10						
Текущий контроль (КСР)	1											1									
Промежуточная аттестация - зачет																					
Итого	72			32								33			39						

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях лекционного типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М.: Мир, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

**4. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.	Уровень знаний ниже минимальных требований.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень

	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки.	много негрубых ошибки.	подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	программе подготовки, без ошибок.	знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция

		сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения. .

### 6.2.1 Контрольные вопросы

вопросы	Код формируемой компетенции
1. Найти все алгебры Ли размерности 2 над полем.	ПК-6
2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли $sl(2)$ .	ПК-6
3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над $\mathbb{R}$ является простой бесконечномерной алгеброй Ли.	ПК-6
4. Гладкие многообразия. Подмногообразия. Гладкие отображения.	ПК-6
5. Определение и примеры групп Ли.	ПК-6
6. Алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии. Ф-связанные векторные поля.	ПК-6
7. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли.	ПК-6
8. Алгебра Ли групп $(\mathbb{R}, +)$ , $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .	ПК-6

9. Алгебра Ли группы $GL(n, R)$ .	ПК-6
10. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.	ПК-6
11. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли.	ПК-6
12. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизаторы.	ПК-6
13. Однородные пространства. Факторгруппа по замкнутой подгруппе.	ПК-6
14. Алгебра Ли подгруппы Ли, нормальной подгруппы.	ПК-6
15. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.	ПК-6
16. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.	ПК-6
17. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.	ПК-6
18. Теорема Адо-Ивасавы.	ПК-6
19. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.	ПК-6
20. Соответствие Ли.	ПК-6

### 6.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции

1. Показать, что пространство ассоциативной алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно произведения  $[a, b] = ab - ba$ .
2. Пусть  $A$  – алгебра над полем  $K$ . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно коммутатора  $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ .
3. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов.
4. Найти все дифференцирования алгебры многочленов, алгебры многочленов Лорана. Доказать, что над полем нулевой характеристики эти алгебры простые.
5. Пусть  $K$  – поле характеристики  $p > 0$ . Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов  $K[x]/(x^p)$ .
6. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в  $R^n$ .
7. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в  $R^n$ ,  $n=2m$ , является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
8. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
9. Доказать, что алгебра Ли  $sl(n, R)$  – простая алгебра Ли.

### 6.2.3 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

1. Найти алгебру Ли группы  $GL(n, R)$ ,  $SL(n, R)$ .
2. Найти алгебру Ли группы  $SO(3)$ . Найти размерность группы  $O(n, R)$ .
3. Найти алгебру Ли группы  $SU(2)$ .
4. Доказательство сходимости ряда  $e^A$ . Экспоненциальное отображение на группе  $GL(n, R)$ .

5. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе  $O(3)$ .
6. Найти неприводимые представления алгебры Ли  $sl(2)$ .
7. Справедлива или нет теорема Ли для разрешимых алгебр Ли над произвольным полем? Привести примеры.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Группы и алгебры Ли 4 курс (математика)

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4499>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

### а) Основная литература

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

### б) Дополнительная литература:

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

### в) Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека «Мир уравнений» (Eqworld)

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика.



Автор (ы): д.ф.-м.н., проф. Кузнецов М.И.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.