

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**федеральное государственное автономное**  
**образовательное учреждение высшего образования**  
**«Национальный исследовательский**  
**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

УТВЕРЖДЕНО

решением ученого совета ННГУ

протокол от "30"ноября 2022 г. №13

**Рабочая программа дисциплины**  
**«Введение в общие цепи Маркова»**

Уровень высшего образования

**Подготовка научных и научно-педагогических кадров**

Научные специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика, 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела, 1.2.1. Искусственный интеллект и машинное обучение, 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 1.3.11. Физика полупроводников, 1.3.19. Лазерная физика, 1.3.4. Радиофизика, 1.3.7. Акустика, 1.3.8. Физика конденсированного состояния, 1.4.1. Неорганическая химия, 1.4.2. Аналитическая химия, 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия, 1.4.7. Высокомолекулярные соединения, 1.4.8. Химия элементоорганических соединений, 1.5.11. Микробиология, 1.5.15. Экология, 1.5.2. Биофизика, 1.5.21. Физиология и биохимия растений, 1.5.5. Физиология человека и животных, 2.2.2. Электронная компонентная база микро и наноэлектроники, квантовых устройств, 3.2.7. Аллергология и иммунология, 5.1.1. Теоретико-исторические правовые науки, 5.1.2. Публично-правовые (государственно-правовые) науки, 5.1.3. Частно-правовые (цивилистические) науки, 5.1.4. Уголовно-правовые науки, 5.1.5. Международно-правовые науки, 5.12.1. Междисциплинарные исследования когнитивных процессов, 5.2.3. Региональная и отраслевая экономика, 5.2.4. Финансы, 5.2.6. Менеджмент, 5.3.7. Возрастная психология, 5.4.2. Экономическая социология, 5.4.4. Социальная структура, социальные институты и процессы, 5.4.6. Социология культуры, 5.4.7. Социология управления, 5.5.2. Политические институты, процессы, технологии, 5.5.4. Международные отношения, глобальные и региональные исследования, 5.6.1. Отечественная история, 5.6.2. Всеобщая история, 5.6.7. История международных отношений и внешней политики, 5.7.1. Онтология и теория познания, 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания, 5.8.7. Методология и технология профессионального образования, 5.9.2. Литературы народов мира, 5.9.5. Русский язык. Языки народов России, 5.9.6. Языки народов зарубежных стран (с указанием конкретного языка или группы языков), 5.9.9. Медиакоммуникации и журналистика

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место и цель дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Введение в общие цепи Маркова» относится к числу факультативных дисциплин образовательного компонента программы аспирантуры и изучается на 3 году обучения в 5 семестре.

**Цель дисциплины** – введение в математическую теорию так называемых общих цепей Маркова. В отличие от цепей Маркова, изучаемых в бакалавриате и магистратуре, здесь допускается произвольное (не обязательно счетное) пространство состояний, что приводит к необходимости использования аппарата теории меры для введения определений и формулировки и доказательства результатов. В то же время, цепи Маркова с непрерывным многомерным пространством состояний возникают в приложениях.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Выпускник, освоивший программу, должен

### Знать:

- современные математические основания теории общих цепей Маркова
- примеры общих цепей Маркова, возникающих в прикладных исследованиях

### Уметь:

- при решении исследовательских и прикладных задач в области теории вероятностей и математической статистики применять аппарат и методы теории общих цепей Маркова

### Владеть:

- навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач теории вероятностей и математической статистики

## 3. Структура и содержание дисциплины.

Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., всего - 72 часа, из которых 36 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа – 18 часов, практические занятия – 18 часов), 36 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

**Таблица 2**

**Структура дисциплины**

Наименование раздела дисциплины	Всего, часов	В том числе					
		Контактная работа, часов					Самостоятельная работа обучающегося, часов
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации	Всего	
Цепи Маркова как математические модели. Обзор по счетным цепям Маркова	12	2	4	0	0	6	6
Общие цепи Маркова	16	12	12	0	0	24	26
Применение общих цепей Маркова к задачам управления	10	4	2	0	0	6	4
Промежуточная аттестация: – зачет							
Итого	72	18	18	0	0	36	36

**Таблица 3****Содержание дисциплины**

<b>№ п/п</b>	<b>Наименование раздела дисциплины</b>	<b>Содержание раздела</b>	<b>Форма проведения занятия</b>	<b>Форма текущего контроля*</b>
1.	Цепи Маркова как математические модели. Обзор по счетным цепям Маркова	Примеры стохастических моделей реальных процессов и явлений в виде цепей Маркова. Классификация состояний счетной цепи. Предельные свойства распределений вероятностей счетной цепи Маркова.	лекции, практики	собеседование, задачи
2.	Общие цепи Маркова	Стохастические переходные ядра. Марковское и строго марковское свойство. Неприводимые цепи. Минорантные множества и цикличность. Возвратность и невозвратность. Инвариантные и стационарные распределения. Эргодические распределения.	лекции, практики	собеседование, задачи
3.	Применение общих цепей Маркова к задачам управления	Задача об обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов. Анализ предельных свойств длин очередей	лекции, практики	собеседование, задачи

**4. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся**

В процессе изучения дисциплины применяются лекционные и семинарские занятия. Применяются следующие виды лекций: 1) лекция-информация (ориентированная на изложение и объяснение научной информации, подлежащей осмыслению и запоминанию); 2) лекция-беседа (предполагающая непосредственное общение со слушателями посредством вопросов информационного, проблемного характера и вопросов для напоминания пройденного материала). Самостоятельная работа реализуется в форме изучения лекций и выполнения домашних заданий. Самостоятельная работа контролируется преподавателем как в ходе аудиторных занятий, так и во время внеаудиторной работы, в том числе посредством консультаций по электронной почте, видеосвязи, в социальных сетях.

**5. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине****5.1. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

При выполнении всех работ учитываются следующие **основные критерии**:

- уровень теоретических знаний (подразумевается не только формальное воспроизведение информации, но и понимание предмета, которое подтверждается правильными ответами на дополнительные, уточняющие вопросы, заданные членами комиссии);
- умение использовать теоретические знания при анализе конкретных проблем, ситуаций;
- качество изложения материала, то есть обоснованность, четкость, логичность ответа, а также его полнота (то есть содержательность, не исключающая сжатости);
- способность устанавливать внутри- и межпредметные связи,

- оригинальность мышления, знакомство с дополнительной литературой и другие факторы.

**Описание шкалы оценивания на промежуточной аттестации в форме зачета**

Оценка	Уровень подготовленности, характеризуемый оценкой
<i>Зачтено</i>	владение программным материалом, понимание сущности рассматриваемых процессов и явлений, умение самостоятельно обозначить проблемные ситуации в организации научных исследований, способность критически анализировать и сравнивать существующие подходы и методы к оценке результативности научной деятельности, свободное владение источниками, умение четко и ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.
<i>Не зачтено</i>	непонимание смысла ключевых проблем, недостаточное владение науковедческой терминологией, неумение самостоятельно обозначить проблемные ситуации, неспособность анализировать и сравнивать существующие концепции, подходы и методы, неумение ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.

**5.2. Примеры типовых контрольных заданий или иных материалов, используемых для оценивания результатов обучения по дисциплине**

**Вопросы для собеседования**

1. Что такое итерированное стохастическое ядро?
2. Приведите пример минорантного множества для процесса перескоков.
3. При каких условиях процесс авторегрессии первого порядка будет аperiodическим?
4. Приведите пример, когда стационарного распределения для цепи Маркова не существует, а инвариантная мера существует.

**Практические задания:**

**Задача 1.** Пусть  $E$  – дискретное множество. Докажите, что считающая мера определяет неприводимую общую цепь с множеством состояний  $E$ .

**Задача 2.** Докажите, что если  $\mathbf{P}(\xi_n > 0) < 1$ , то случайное блуждание с отражением  $S_{n+1} = \max(S_n + \xi_n, 0)$ , то одноточечное множество  $\{0\}$  является минорантным.

**Задача 3.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – неотрицательные абсолютно непрерывные независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью  $f(x)$ . Определим случайные величины  $\eta_1 = \xi_1$ ,  $\eta_n = |\xi_1 - \xi_{n-1}|$ . Найти плотность распределения переходного ядра.

**Задача 4.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – неотрицательные абсолютно непрерывные независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью  $f(x)$ . Определим случайные величины  $\eta_1 = \xi_1$ ,  $\eta_n = |\xi_1 - \xi_{n-1}|$ . Доказать, что стационарная плотность удовлетворяет уравнению

$$g(y) = \int_0^{\infty} g(x+y) f(x) dx + \int_0^{\infty} g(x) f(x+y) dx,$$

и имеет вид  $g(y) = \lambda^{-1}(1 - F(y))$ , где  $\lambda = \mathbf{E} \xi_1$ ,  $F(y) = \mathbf{P}(\xi_1 < y)$ .

### **Вопросы к зачету:**

1. Дайте определение стохастического переходного ядра
2. Дайте определение неприводимости общей цепи Маркова
3. Дайте определение минорантного множества
4. Дайте определение циклической общей цепи Маркова
5. Дайте определение возвратности и невозвратности общей цепи Маркова
6. Дайте определение инвариантного и стационарного распределений и поясните различие этих понятий
7. Сформулируйте строго марковское свойство для общей цепи Маркова

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.**

#### **а) Основная литература**

1. Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Введение в общие цепи Маркова: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. – Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с. № 610.13.08 в фонде электронных ресурсов ННГУ. Режим доступа: <http://www.unn.ru/books>

#### **б) Дополнительная литература**

1. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 2004. – Кн. 1: 520 с., Кн. 2: 408 с. (1 экз.)
2. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. – М.: Мир, 1989. – 207 с. (3 экз.)
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Наука, 1984. – 751 с. (15 экз.)

#### **в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы** архивы математических журналов на сайте [mathnet.ru](http://mathnet.ru)

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;
  - материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование;
  - лицензионное программное обеспечение: *Windows, Microsoft Office*;
  - обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.
- ресурсам.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 № 2122),

Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Приказ Минобрнауки РФ от 20.10.2021 № 951).

Авторы:

Авторы: Зорин Андрей Владимирович, профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных Института ИТММ

Зорин Владимир Александрович, доцент кафедры теории вероятностей и анализа данных Института ИТММ

Рецензент(ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

**Программа одобрена** на заседании Методической комиссии Института /факультета от \_\_\_\_\_ 2022 года, протокол № \_\_\_\_.