

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Математическая логика

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Прикладная математика и информатика (общий профиль)

Форма обучения
очная

Нижегород

2023

1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины Б1.В.06.

| № варианта | Место дисциплины в учебном плане образовательной программы | Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД |
|------------|---|--|
| 2 | Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений | Дисциплина Б1.В.06 Математическая логика относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений. |

2. Планируемые результаты обучения

соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

| Формируемые компетенции | Планируемые результаты обучения по дисциплине), в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства |
|---|--|--|---|
| | Индикатор достижения компетенции | Результаты обучения по дисциплине | |
| ПК-3. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям | ПК-3.1. Знает методы сбора, обработки и интерпретации данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям | Знает классификацию уравнений математики, основные задачи этих для уравнений, общие схемы основных методов математических наук, основные методы исследования корректности постановок задач | Задача (практическое задание), контрольная работа |
| | ПК-3.2. Умеет собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям | Умеет классифицировать уравнения математики, основные задачи этих для уравнений, общие схемы основных методов математических наук, основные методы исследования корректности постановок задач | Задача (практическое задание), контрольная работа |
| | ПК-3.3. Имеет практический опыт сбора и обработки данных современных научных исследований | Владеет опытом решения актуальных задач прикладной математики и информатики | Задача (практическое задание), тест |

| | | | |
|--|---|--|--|
| | следований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям | | |
|--|---|--|--|

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

| | |
|---|--------------|
| Общая трудоемкость | 4 ЗЕТ |
| Часов по учебному плану | 144 |
| в том числе | |
| контактная работа: | 50 |
| - занятия лекционного типа | 32 |
| - занятия семинарского типа | 16 |
| - текущий контроль (КСР) | 2 |
| самостоятельная работа | 58 |
| Промежуточная аттестация – экзамен | 36 |

3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине | Всего, час. | В том числе | | | | |
|--|-------------|---|---------------------------|----------------------------|-----------|------------------------------|
| | | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них | | | | Самостоятельная работа, час. |
| | | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего | |
| Элементы логического языка первого порядка | 14 | 4 | 2 | | 6 | 8 |
| Модели формул логического языка первого порядка | 14 | 4 | 2 | | 6 | 8 |
| Логический вывод | 14 | 4 | 2 | | 6 | 8 |
| Канонические формы предложений в логике первого порядка | 14 | 4 | 2 | | 6 | 8 |
| Приближенное выражение свойств структур в логике первого порядка | 15 | 4 | 2 | | 6 | 9 |
| Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий | 18 | 6 | 3 | | 9 | 9 |
| Изучение моделей вычислений на примере машины Тьюринга | 17 | 6 | 3 | | 9 | 8 |
| Текущий контроль (КСР) | 2 | | | | 2 | |
| Промежуточная аттестация – экзамен | 36 | | | | | |
| Итого | 144 | 32 | 16 | | 50 | 58 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности.

4.1. Виды самостоятельной работы

- Выполнение домашних практических заданий.
- Чтение справочной, методической и научной литературы.
- Подготовка к выполнению письменных контрольных работ.
- Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

Формой контроля выполнения домашних и контрольных работ является проверка правильности их выполнения. Формой контроля работы с дополнительной литературой являются дополнительные вопросы на экзамене.

4.3. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. Москва, Изд. МЦНМО, 2012.
www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf
2. Гордон Е.И. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. Рег. №10.98.06. <http://www.unn.ru/books/resources.html>
3. Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Элементы неклассических логик и моделей вычислений: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 33 с. www.unn.ru/books/met_files/NL.pdf

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Индикаторы компетенции | Оценка сформированности компетенций | | | | | | |
|------------------------|-------------------------------------|--|---|--|--|--|---|
| | плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
| Знания | отсутствие знаний материала | наличие грубых ошибок в основном материале | знание основного материала с рядом негрубых ошибок | знание основного материала с рядом заметных погрешностей | знание основного материала с незначительными погрешностями | знание основного материала без ошибок и погрешностей | знание основного и дополнительного материала без ошибок |
| Умения | полное отсутствие умений | недостаточно умений | умение использовать отдельные приемы при наличии существенных | умение использовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок | умение использовать отдельные приемы | умение использовать приемы | умение использовать приемы и способность принимать решение на |

| | | | | | | | |
|--------|---------------------------|--------------------|-----------------------------|----------------------------------|-------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| | | | ошибок | | | | этой основе |
| Навыки | полное отсутствие навыков | отсутствие навыков | наличие минимальных навыков | посредственное владение навыками | достаточное владение навыками | хорошее владение навыками | всестороннее владение навыками |

Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка | Уровень подготовки |
|---------------------|--|
| Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| Отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| Очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| Хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |
| Удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| Плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

| Вопрос | Код формируемой компетенции |
|--|-----------------------------|
| 1. Логический язык первого порядка. Понятия универса, константы, переменной, функции, терма, предиката. Число всех k-местных предикатов и функций на n-элементном универсе. Синтаксис логического языка первого порядка: описание алфавита, построение переменных, термов и формул, примеры. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения. Примеры. | ПК-3 |
| 2. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие алгебраической системы (структуры) заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры. Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры: примеры и контрпримеры. | ПК-3 |
| 3. Графический и табличный способы задания структур на конечных универсах, примеры. Формула подсчета числа всех структур на конечных универсах. Понятие числа моделей и доли выполнимости предложений логического языка первого порядка, примеры ее вычисления. | ПК-3 |
| 4. Понятие исключающих кванторов, модификация правил построения формул, связанная с введением исключающих кванторов. Выражение истинностных значений формул, содержащих исключающие кванторы. Понятие Г-формулы. Логическая равносильность любой формулы языка первого порядка некоторой Г-формуле, примеры. | ПК-3 |
| 5. Логический вывод. Формальные понятия доказательства и правила вывода, пример. Разветвляющие и неразветвляющие правила. Существование конечного числа правил вывода и математи- | ПК-3 |

| | |
|--|------|
| ческое понятие доказательства, при помощи которых можно доказать утверждения вида $\Gamma \Rightarrow A$. Пример. | |
| 6. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Лемма о поисковых последовательностях (формулировка без доказательства). Понятие дерева доказательства. Понятие выводимости формулы A из множества гипотез Г. Теорема о корректности дедуктики. | ПК-3 |
| 7. Логический вывод. Понятие ветви поискового дерева, насыщенной относительно заданного множества параметров. Понятие полного поискового дерева. Лемма о существовании полного дерева. | ПК-3 |
| 8. Логический вывод. Теоремы о полноте и об адекватности дедуктики. Теорема о компактности. | ПК-3 |
| 9. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Предваренные нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к префиксному виду, примеры. | ПК-3 |
| 10. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятия сингулярной и примарной формул. Алгоритм приведения любой сингулярной формулы к булевой комбинации примарных, пример. | ПК-3 |
| 11. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Понятие свободного вхождения атомарной части в формулу. Понятие атомарно замкнутой и антипрефиксной формул. Основные этапы алгоритма приведения атомарно замкнутой формулы к антипрефиксному виду, пример. | ПК-3 |
| 12. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Понятие доли выполнимости предложений. Ее обобщение для формул, содержащих свободные переменные. Свойства нормальной доли выполнимости. | ПК-3 |
| 13. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Основные свойства, связанные с экспоненциальной сходимостью. | ПК-3 |
| 14. Понятие экспоненциальной сходимости числовой последовательности. Взаимосвязь нормальной доли выполнимости и экспоненциальной сходимости. | ПК-3 |
| 15. Приближенное выражение свойств структур в логическом языке первого порядка. Доказательство закона 0-1 (теорема Глебского). | ПК-3 |
| 16. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий. | ПК-3 |
| 17. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость. Метод элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости некоторых теорий (общий алгоритм). Основной этап метода для доказательства алгоритмической разрешимости теории плотного линейного порядка без конечных точек, пример. | ПК-3 |
| 18. Основные этапы метода элиминации кванторов для доказательства алгоритмической разрешимости теории целых чисел (алгоритм Пресбургера). | ПК-3 |
| 19. Некоторые замечания о возможностях формализации математических теорий. Основные проблемы при формализации, пути их решения. | ПК-3 |
| 20. Расширение и сужение элементарных теорий. Консервативные и неконсервативные расширения теорий, примеры. Явные определения новых функциональных и предикатных символов. Установление явной определимости нелогических символов через другие для исключения из теорий избыточных символов (метод Падоа), пример. Эквивалентные и слабо эквивалентные теории. | ПК-3 |
| 21. Модели вычислений, машина Тьюринга: представление и преобразование информации, тьюринговы программы. Алгебра тьюринговых программ (их запись при помощи аналитических | ПК-3 |

| | |
|--|------|
| выражений). Методика доказательства правильности тьюринговых программ. Пример. | |
| 22. Вычислимость и разрешимость: понятия словарных функций и словарных отношений, полу-разрешимые и разрешимые отношения, вычислимые функции. Примеры. | ПК-3 |
| 23. Понятие частично-рекурсивных функций. Тезис Черча | ПК-3 |
| 24. Понятия разрешимых отношений и вычислимых функций. Примеры невычислимой по Тьюрингу функции и алгоритмически неразрешимого отношения. | ПК-3 |
| 25. Измерение алгоритмической сложности задач: временная и пространственная сложность алгоритмов, расшифровка этих понятий на примере тьюринговых программ. Верхняя и нижняя оценки временной сложности. | ПК-3 |
| 26. Классы P и NP. Примеры задач из этих классов. Полиномиальная сводимость одной задачи к другой, NP-полные и NP-трудные задачи, пример. | ПК-3 |

5.2.2. Образец контрольной работы для оценивания результатов обучения в виде умений и владений (ПК-3)

Типовая контрольная работа содержит несколько заданий и оценивается по семибалльной системе. За каждое правильно выполненное задание без недочетов дается 1 балл, за правильно выполненное задание с недочетом – 0,5 балла. За невыполненное задание или неправильно выполненное задание баллы не начисляются. Полученные баллы суммируются, и определяется % выполнения контрольного задания по формуле $(100s)/n$, где n – общее число заданий и s – сумма набранных баллов. Оценка за контрольное задание определяется следующим образом:

| % выполнения | Оценка |
|--------------|---------------------|
| 100 % | Превосходно |
| 90 – 99 % | Отлично |
| 80 – 89 % | Очень хорошо |
| 70 – 79 % | Хорошо |
| 50 – 69 % | Удовлетворительно |
| 20 – 49 % | Неудовлетворительно |
| < 20 % | Плохо |

Вариант № 1

1. Составить над заданным алфавитом A программу, с двумя выходами, которая бы заданное псевдослово X перерабатывала само в себя и осуществляла бы 1-й выход, если X удовлетворяет условию P , и 2-й выход – в противном случае (через m' обозначен унарный код натурального числа m , то есть слово, состоящее из m символов “1”):

а) $A = \{1\}$, $X = m' \downarrow \#$, где условие P истинно тогда и только тогда, когда m четно,

б) $A = \{0,1\}$, $X = U \downarrow \#$, где условие P истинно тогда и только тогда, когда U содержит подслово “101”.

2. Напишите тьюрингову программу, которая выполняет копирование, т.е. приписывание копии справа через пробел, произвольного слова над алфавитом $A = \{0,1\}$.

3. Напишите тьюрингову программу, которая для заданного входного слова m над алфавитом $A = \{1\}$ вычисляет функцию $[m/3]$ и записывает результат через пробел справа от входного слова.

4. Напишите тьюрингову программу, которая для заданного входного слова m над алфавитом $A = \{1\}$ находит его двоичное представление и записывает результат через пробел справа от входного унарного слова.

5.2.3. Образцы тестовых заданий для оценивания результатов обучения в виде знаний (ПК-3)

Процедура оценки знаний методом тестирования осуществляется следующим образом. За каждый полностью правильный ответ на вопрос теста начисляется один балл. Набранные баллы суммируются. Зачет за тест выставляется при наборе такого количества баллов, которое составляет не менее 50 % от общего числа вопросов в тесте.

В случае неполучения зачета за тест студент должен заново пройти тестирование.

1. Какие из нижеприведённых последовательностей символов являются *подформулами* формулы

$\forall x [P(x) \vee \exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]]$?

- 1) x
- 2) $P(x)$
- 3) $f(y)$
- 4) $Q(y) \& R(x, f(y))$
- 5) $\forall x P(x)$
- 6) $\exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]$
- 7) $\forall x \exists y [\neg Q(y) \& R(x, f(y))]$

2. Какие из нижеприведённых формул являются *предложениями*?

- 1) $P(x)$
- 2) $\exists x P(x)$
- 3) $\exists x R(x, y)$
- 4) $\forall x \exists y R(x, y)$
- 5) $\forall x [P(x) \vee Q(x)]$
- 6) $\forall x [P(x) \vee Q(y)]$
- 7) $\forall x [P(x) \vee \exists y Q(y)]$
- 8) $\forall x [P(x) \vee \exists y R(x, y)]$
- 9) $[\forall x P(x)] \vee [\exists y R(x, y)]$

3. Какие из нижеприведённых формул являются *выполнимыми*?

- 1) $\exists x P(x)$
- 2) $\exists x [P(x) \& \neg P(x)]$
- 3) $[\forall x P(x)] \& [\forall x \neg P(x)]$
- 4) $\exists x [P(x) \vee \neg P(x)]$
- 5) $[\forall x P(x)] \vee [\forall x \neg P(x)]$
- 6) $[\forall x P(x)] \& [\exists x \neg P(x)]$

5.2.4. Примеры задач, выносимых на экзамен

Задача 1.

Найдите все термы, атомарные формулы и подформулы, содержащиеся в формуле логического языка первого порядка

$\forall x \exists y \forall z [[P(x) \& \neg Q(y)] \vee [R(z) \& Q(x)]]$

Определите число моделей этой формулы на n -элементном универсе и подсчитайте ее долю выполнимости, найдите ее предел при $n \rightarrow \infty$. Постройте какую-нибудь модель этой формулы на универсе из четырех элементов.

Задача 2.

Приведите заданную формулу к антипрефиксному виду:

$$\forall x \exists y \forall z [[P(x) \& \neg Q(y)] \vee [R(z) \& Q(x)]]$$

Пользуясь теоремой Глебского, вычислите предел ее доли выполнимости.

Задача 3.

Напишите программу для машины Тьюринга, которая перерабатывала бы входное слово m над алфавитом $A = \{1\}$ в выходное слово $[m/3]$ (здесь m – фиксированное, но заранее не известное натуральное число).

Используя методику Флойда, докажите правильность работы написанной программы.

Найдите верхние оценки ее пространственной и временной сложности.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. Москва, Изд. МЦНМО, 2012.
www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf
2. Клини С. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
3. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика. М.: Наука, 1977.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>

б) дополнительная литература

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
2. Бочвар Д.А., Гришин В.Н. (ред.) Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
3. Гейтинг А. Интуиционизм. М.: Мир, 1965.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
4. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: ГИИЛ, 1948.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
5. Успенский В.А. Лекции о вычислимых функциях. М.: ГИФМЛ, 1960.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
6. Чёрч А. Введение в математическую логику. Т.1. М.: ИЛ, 1960.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
7. Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент кафедры АГиДМ С.В. Сорочан

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Зав. кафедрой алгебры, геометрии и дискретной математики: д.ф.-м.н. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.