

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
президиумом Ученого совета ННГУ
протокол от
«14» декабря 2021 г. № 4

Рабочая программа дисциплины

Математические методы нелинейной
динамики

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2022 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.06, «Математические методы нелинейной динамики», относится к части, формируемой участниками образовательных отношений направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-2. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-2.1. Знает методы сбора, обработки и интерпретации данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	<i>Знать:</i> Знать основные термины, понятия и методы нелинейной динамики, применяемые для анализа поведения конкретных динамических объектов, основные бифуркации нелинейных динамических систем, приемы исследования динамики нелинейных систем второго порядка	<i>тест</i>
	ПК-2.2. Умеет собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований,	<i>Уметь:</i> Уметь использовать методы и приемы нелинейной динамики при решении конкретных задач динамики систем.	<i>задачи</i>

	необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям		
	ПК-2.3. Имеет практический опыт сбора и обработки данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Иметь: Имеет навык владения основными методами и представлениями нелинейной динамики при проведении исследований динамики конкретных объектов и систем.	задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	<u>4</u> ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
КСР	2
СР	42
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины Математические методы нелинейной динамики

Наименование и краткое содержание	Всего	в том числе
-----------------------------------	-------	-------------

разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	(часы)	контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные	Всего контактных часов	СРС
Тема1. Введение. Динамические системы, основные понятия. Примеры задач из физики, механики, биологии, экономики, приводящие к понятию «динамическая система». Динамические системы с непрерывным временем (системы дифференциальных уравнений) и с дискретным временем (отображения). Устойчивость тривиального решения. Второй метод Ляпунова. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. Общая классификация состояний равновесия многомерных систем	12	4	4		8	4
Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем. Топологическая эквивалентность топологических структур. Особые траектории и ячейки динамических систем. Основные понятия (фазовое пространство, фазовая кривая, состояние равновесия, векторное поле, особые точки). Классификация простых состояний равновесия. Сложные состояния равновесия. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых. Индексы состояний равновесия (особых точек векторного поля). Поведение траекторий на бесконечности. Особые траектории и ячейки динамических систем. Понятие грубости динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости. Примеры анализа двумерных динамических систем.	12	4	4		8	4
Тема 3. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС. Понятие грубости (структурной устойчивости). Необходимые и достаточные условия грубости.	4	2	2		4	0
Тема 4. Консервативные системы с одной степенью свободы. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет). Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = 0$. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях	18	6	6		12	6

уравнения КДВ. Приложение к задаче Кеплера о движении частицы в поле тяготения. Обобщение на произвольные двумерные системы Гамильтона. Задача Вольтерра.						
Тема 5. Консервативные трехмерные автономные системы. Уравнения Эйлера движения асимметричного волчка. Построение решений. Уравнения гидродинамического типа. Метод Галеркина. Триплет Обухова. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемые случаи.	14	4	4		8	6
Тема 6. Многомерные системы Гамильтона. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона. Теорема Пуассона. Теоремы Лиувилля и Арнольда. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: $\ddot{x} + x + x^3 = 0$. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Теория КАМ.	10	2	2		4	6
Тема 7. Квазиконсервативные автономные системы. Метод усреднения. Теоремы Боголюбова. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова (на примере уравнения $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$). Применение метода усреднения для анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$. Пример анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu(a + bx^2)\dot{x}$ методом усреднения. Метод малого параметра Пуанкаре. Пример: уравнение Ван дер Поля. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Метод усреднения для квазигамильтоновых существенно нелинейных двумерных автономных систем. Существование предельных циклов. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение. Возможные типы фазовых портретов для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon(d - x^2)\dot{x}$. Разрывные колебания. Метод точечных отображений. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример определения	20	6	6		12	8
Тема 8. Неавтономные периодические по времени системы. Вынужденные колебания в линейных системах. Применение метода усреднения в резонансном случае для анализа уравнений вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \nu t)$. Применение метода усреднения для анализа уравнения	17	4	4		8	8

$\ddot{x} + x = \varepsilon(ax^3 + dx + b\dot{x} + c \sin(t))$ Синхронизация колебаний на примере уравнения $\ddot{x} + x = \varepsilon(dx + (1 - x^2)\dot{x} + c \cos(t))$. Параметрические системы. Основы теории Флоке. Резонансы в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Усреднение в резонансном случае. Возможные типы резонансных зон в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Анализ резонансных зон на примере уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon((d - x^2)\dot{x} + c \sin(vt))$						
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация - экзамен	36					
Итого	144	32	32		66	42

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа, индивидуальных консультаций.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен), в иных формах (контрольная работа).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

4.1 Виды самостоятельной работы студентов

- ❖ Проработка лекционного материала.
- ❖ Решение примеров из списка вопросов по курсу.
- ❖ Выполнение контрольной работы

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				

компетенций)							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения., Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция

зачтено		сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

6.2.1 Контрольные вопросы

Тема 1. Введение. Динамические системы, основные понятия

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник). ПК-2
2. Динамические системы: основные понятия, классификация, пример. ПК-2
3. Устойчивость состояния равновесия. Второй метод Ляпунова. ПК-2
4. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. ПК-2
- Критерий Гурвица. ПК-2
5. Типы простых состояний равновесия в многомерных системах. ПК-2

Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем.

6. Основные понятия. Особые траектории и ячейки динамических систем. ПК-2
7. Классификация простых состояний равновесия. ПК-2
8. Направление стремления фазовых кривых к простому состоянию равновесия. ПК-2
- Сложные состояния равновесия. Пример.
9. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых. ПК-2
10. Индексы особых точек. ПК-2
11. Поведение траекторий на бесконечности. ПК-2
12. Примеры анализа динамических систем (в билете будет один из примеров, рассмотренных в лекциях). ПК-2
13. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС. ПК-2

Тема 3. Интегрируемые системы с одной степенью свободы. ПК-2

14. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет).

15. Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова.
16. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции.
17. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.
18. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x - x^3 = 0$.
19. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$.
20. Сравнение свойств решений уравнений $\ddot{x} + x \pm x^3 = 0$, $\ddot{x} + x = 0$.
21. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях уравнения КДВ.
22. Приложение к задаче Кеплера о движении частицы в поле тяготения.

Тема 4. Интегрируемые трехмерные системы.

ПК-2

23. Трехмерные системы. Уравнения движения асимметричного волчка и их решение.
24. Уравнения гидродинамического типа.
25. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемый случай. Построение решений (сведение к квадратурам).

Тема 5. Многомерные Гамильтоновы системы.

ПК-2

26. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона.
27. Теоремы Пуассона, Лиувилля и Арнольда.
28. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.
29. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние.
30. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Основы теории КАМ.

Тема 6. Квазиинтегрируемые (квазиконсервативные) автономные системы.

ПК-2

31. Принцип усреднения. Пример.
32. Метод усреднения. Первая теорема Боголюбова.
33. Метод Пуанкаре. Периодические решения в уравнении $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$.
34. Анализ уравнения методом усреднения.
35. Пример анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$ методом усреднения.
36. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.
37. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.
38. Метод усреднения для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым.
39. Существование предельных циклов для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение.
40. Пример: исследовать уравнение $\ddot{x} + x + x^3 = \mu(d - x^2)\dot{x}$
41. Метод точечных преобразований. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример.
42. Разрывные колебания.

Тема 7. Квазиинтегрируемые (квазиконсервативные) неавтономные системы.

ПК-2

43. Вынужденные колебания в линейных системах.
44. Вынужденные колебания на примере уравнения.
45. Роль нелинейности на примере уравнения.
46. Синхронизация колебаний на примере уравнения: $\ddot{x} + x = \mu[(1 - x^2)\dot{x} + dx + c \cos(vt)]$
47. Параметрические системы.
48. Резонансы в существенно нелинейных системах. Усреднение в резонансном случае.
49. Возможные типы резонансных зон.
50. Структура резонансных зон для уравнения $\ddot{x} + x - x^3 = \mu(d\dot{x} + c \sin(vt))$, где d, c, V - параметры.

6.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции - не предполагаются.

6.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-2

Пример экзаменационного билета

Нижегородский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Кафедра ДУМЧА Дисциплина Математические методы
нелинейной динамики

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник).
2. Классификация простых состояний равновесия.
3. Вынужденные колебания на примере уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, vt)$.

Зав. кафедрой _____
Экзаменатор _____

6.2.4. Темы контрольных работ

1. Для предлагаемого набора двумерных динамических систем решить вопрос об устойчивости состояния равновесия. Примеры систем см., например, в пособии «Динамические системы». Часть 1. Учебно-методический комплекс. Сост. А.Д. Морозов.-Н.Новгород: ННГУ, 2002, 32 с. (ПК-2)
2. Построить фазовые портреты для конкретных двумерных динамических систем. Качественное исследование трехмерной системы Лоренца. (ПК-2)
3. Построение решений уравнений Дюффинга, маятникового типа, уравнений с квадратичной нелинейностью.(ПК-2)
4. Построение решений для интегрируемой системы, описывающей одномодовый квантовый генератор.(ПК-2)
5. Исследование уравнения Ван дер Поля методом усреднения. (ПК-2)
6. Доказательство теоремы о максимальном числе предельных циклов при алгебраическом возмущении линейного осциллятора.(ПК-2)
7. Качественное исследование автономных возмущенных уравнений Дюффинга и маятника. (ПК-2)
8. Качественное исследование периодических по времени возмущений уравнений Дюффинга и маятника. (ПК-2)

Формулируются 4 варианта контрольной работы по две задачи в каждом варианте.

Превосходно: 98-100 баллов	Решены обе задачи без замечаний.
Отлично: 91-97	Решены обе задачи с незначительными пометками.

Очень хорошо: 80-90	Решены обе задачи с замечаниями.
Хорошо: 60-79	Решена одна задача без замечаний. Другая задача решена не полностью.
Удовлетворительно: 50-59	Решена одна задача без замечаний. Другая задача не решена.
Неудовлетворительно: 20-49	Не решены обе задачи.
Плохо: 0-19	Работа не представлена преподавателю.

Примеры вариантов контрольной работы.

$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = -y + x^2 y$ Исследовать на устойчивость состояние равновесия	$\ddot{x} + \sin(x) = 0$ Найти $x(t)$
---	--

$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(a + bx - x^2)y, \quad a, b - \text{параметры}$ Построить фазовые портреты	$\ddot{x} + x + x^3 = 0$ Найти $x(t)$
---	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Морозов А.Д. Математические методы теории колебаний: учебное пособие.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2017.-144 с. (10 экз. в библиотеке ННГУ).
2. Морозов А.Д. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ. Электронное учебно- методическое пособие.-Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.— 98 с. Рег. № 480.12.06.

б) дополнительная литература:

3. Морозов А.Д. Д Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний: монография. - Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995 г. - 292 с. 4 экз.
4. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Учебное пособие.-Красноярск: Изд-во Красноярского университета, 1995.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Математические методы нелинейной динамики (МАТЕМАТИКА 4 к.)»,

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6848>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>

Программа WInSet (Драгунов Т.Н., Морозов А.Д. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем: Учебное пособие.-Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.-102 с., <http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/41.pdf>).

8.Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом, компьютером, проектором и экраном

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (3++) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор: Морозов А.Д.

Заведующий кафедрой: Калинин А.В.