

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

---

Утверждено

решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «31» мая 2023 г. № 6

## **Рабочая программа дисциплины**

Линейная алгебра

---

Уровень высшего образования  
бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
09.03.02 Информационные системы и технологии

---

Направленность образовательной программы  
Информационные системы и технологии в физических  
исследованиях

---

Форма обучения  
очная

---

Год начала подготовки

2022 год

---

Нижний Новгород  
2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Линейная алгебра» (Б1.О.05.03) относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана ООП.

Дисциплина преподается во втором семестре.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знать основы высшей математики, общей физики, теории вероятности и технологий программирования.	Знание методов решения основных типов задач линейной алгебры в приложении к основным видам задач высшей математики, теории вероятности и технологий программирования.	Собеседование
	ОПК-1.2. Уметь решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	Умение выбирать правильные подходы к решению и решать основные типы задач линейной алгебры при решении стандартных профессиональных задач обработки и анализа результатов компьютерного моделирования и экспериментальных исследований.	Задача
	ОПК-1.3. Иметь навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Владение навыками решения задач линейной алгебры применительно к анализу результатов компьютерного моделирования и экспериментальных исследований.	Задача

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

Очная форма обучения	
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	66
- занятия лекционного типа, ч	32
- практические занятия, ч	32
- КСРИФ, ч	2
самостоятельная работа, ч	42
контроль, ч	36
Промежуточная аттестация	экзамен

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В ТОМ ЧИСЛЕ					Самостоятельная работа, часы	Контроль, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) часы, из них						
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Занятия лабораторного типа	КСРИФ	Всего		
<b>1. Введение. Алгебра матриц. Определители.</b> Понятие матрицы. Основные операции над матрицами, функции от матриц. Специальные виды матриц (симметричные, эрмитовы, ортогональные) Определители, основные свойства и методы вычисления определителей. Формула полного разложения определителя и теорема Лапласа. Понятие обратной матрицы, нахождение ее	26	6	6	—	—	12	8	6

элементов как решение систем уравнений. Решение матричных уравнений. Линейная независимость строк и ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.								
<b>2. Системы линейных уравнений.</b> Определение и свойства систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера. Системы однородных линейных уравнений, свойства фундаментальной системы решений как векторного пространства. Нахождение общего решения системы неоднородных линейных уравнений.	22	4	6	—	—	10	6	6
<b>3. Линейные пространства.</b> Определение и свойства линейного пространства. Базис и размерность в линейных пространствах. Подпространства линейных пространств. Разложение пространства в прямую сумму подпространств. Преобразование базисов и координат векторов, матрица преобразования. Евклидовы пространства, свойства скалярного произведения, матрица Грама. Ортонормированный базис, метод ортогонализации Грама-Шмидта. Комплексные евклидовы пространства.	34	8	8	—	—	16	10	8
<b>4. Линейные операторы.</b> Определение и свойства линейного оператора. Матричное представление линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор, самосопряженные	36	8	8	—	—	16	10	10

операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов. Ортогональные и унитарные операторы.								
<b>5. Квадратичные формы.</b> Определение и свойства билинейных и квадратичных форм. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной и квадратичной формы при замене базиса. Метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований и метод Якоби для приведения квадратичной формы к диагональному виду. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.	24	6	4	—	—	10	8	6
<b>Промежуточная аттестация</b>	2	—	—	—	2	—	—	—
<b>Итого</b>	144	32	32	—	2	66	42	36

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках практических занятий, включая контрольные работы.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме - устный экзамен

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающегося проводится в форме выполнения домашних контрольных заданий и изучения лекционного материала. В качестве учебно-методического обеспечения самостоятельной работы используется литература, указанная в разделе 6. Примеры контрольных вопросов и заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

**5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетво	удовлетвори	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно

компетенций (индикатора достижения компетенций)		нительно	тельно				
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

№	Вопросы	Код формируемой компетенции
1	Матрицы. Основные операции над матрицами.	ОПК-1
2	Определители. Основные свойства. Формулировка теоремы Лапласа.	ОПК-1
3	Обратная матрица. Нахождение ее элементов как решение систем уравнений.	ОПК-1
4	Линейная независимость строк и ранг матрицы.	ОПК-1
5	Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.	ОПК-1

6	Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.	ОПК-1
7	Общее решение системы неоднородных линейных уравнений.	ОПК-1
8	Линейные пространства. Базис и размерность.	ОПК-1
9	Подпространства линейных пространств.	ОПК-1
10	Преобразование базисов и координат векторов. Матрица преобразования.	ОПК-1
11	Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения. Матрица Грама. Ортонормированный базис. Комплексные евклидовы пространства.	ОПК-1
12	Метод ортогонализации Грама-Шмидта.	ОПК-1
13	Линейные операторы, свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.	ОПК-1
14	Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов.	ОПК-1
15	Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор.	ОПК-1
16	Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов.	ОПК-1
17	Ортогональные и унитарные операторы.	ОПК-1
18	Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.	ОПК-1
19	Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду	ОПК-1
20	Метод ортогональных преобразований приведения квадратичной формы к диагональному виду	ОПК-1
21	Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра	ОПК-1

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

#### 1. Введение. Алгебра матриц. Определители.

##### 1.1. Вычислить $n$ -ю степень матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i - \text{числа}$$

1.2. Матрицы  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  называются матрицами

Паули и играют большую роль в математическом аппарате квантовой механики, в частности, в описании спина электрона. Найти коммутаторы этих матриц:  $[\sigma_x, \sigma_y]$ ,  $[\sigma_y, \sigma_z]$ ,  $[\sigma_z, \sigma_x]$ .



1.3. Вычислить определитель  $n$ -го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \vdots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \vdots & 0 \end{vmatrix}.$$

1.4. Показать, что определитель эрмитовой матрицы всегда является вещественным числом.

1.5. Найти матрицу  $X$  из уравнения.  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$

## 2. Системы линейных уравнений.

2.1. Найти коэффициенты квадратичного многочлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , зная, что  $f(1) = -1$ ,  $f(-1) = 9$  и  $f(2) = -3$ .

2.2. Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение системы линейных однородных уравнений: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

2.3. При каком значении параметра  $\lambda$  система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{является совместной?}$$

2.4. Среди многочленов степени, не превосходящей 2, найти два линейно независимых многочлена  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  таких, что  $f_1(2) = f_2(2) = 3$ .

## 3. Линейные пространства.

3.1. Для множества положительных вещественных чисел операции сложения и умножения на вещественное число определены как « $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ » =  $x \cdot y$  и « $\lambda \mathbf{x}$ » =  $x^\lambda$ . Является ли указанное множество с такими операциями линейным пространством? В случае положительного ответа найти его размерность и указать базис.

3.2. В пространстве  $R_3$  даны два базиса  $\{\mathbf{e}\}$  и  $\{\mathbf{f}\}$  с координатами базисных векторов в стандартном базисе  $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 3)$  и  $\mathbf{f}_1 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{f}_3 = (1, 0, 2)$ .

1) Найти матрицу перехода  $S$  от базиса  $\{\mathbf{e}\}$  к базису  $\{\mathbf{f}\}$ .

2) Найти матрицу обратного перехода.

3) Найти координаты элемента  $\mathbf{e}_1$  в обоих базисах.

4) Найти координаты  $X^e$  элемента  $\mathbf{x}$  в базисе  $\{\mathbf{e}\}$ , если его координаты в базисе  $\{\mathbf{f}\}$  есть  $X^f = (5, 3, 1)$ .

3.3. Выяснить, является ли множество  $P$  векторов пространства  $R_n$ , все координаты которых равны между собой, подпространством линейного пространства, и если является, то найти его размерность.

3.4. Найти размерность суммы и пересечения подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , являющихся линейными оболочками векторов  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  и  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 0);$$

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 3, 0, 1).$$

3.5. Могут ли векторы  $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$  и  $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$  образовать базис в трёхмерном пространстве? Построить с помощью данной системы векторов ортонормированный базис.

3.6. В комплексном пространстве  $C_n$  со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \quad \text{построить базис в ортогональном дополнении } M^\perp$$

подпространства  $M$ , если компоненты векторов  $\mathbf{x} \in M$  удовлетворяют уравнению  $x_1 + ix_2 = 0$  и  $n = 2$ .

#### 4. Линейные операторы.

4.1. Выяснить, является ли данное преобразование пространства  $R_n$

линейным:  $A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, n = 2$ .

4.2. Записать в декартовом базисе трёхмерного пространства матрицу оператора проектирования на прямую линию, заданную уравнением  $x = z = 0$ .

4.3. Записать в базисе из тригонометрических функций  $\{\cos x, \sin x\}$  матрицу оператора дифференцирования  $D = d/dx$ .

4.4. Найти собственные значения и собственные вектора оператора, заданного своей матрицей  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$ .

4.5. Найти вид оператора с матрицей Паули  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  в собственном базисе оператора с матрицей Паули  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ .

4.6. Найти собственные функции и собственные значения оператора  $-i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , где  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

4.7. Найти сопряжённый оператор к линейному оператору  $A$ , осуществляющему поворот на угол  $\varphi = 2\pi/3$  вокруг прямой  $x_1 = x_2 = x_3$  в пространстве  $R_3$ .

#### 5. Квадратичные формы.

5.1. Привести квадратичную форму от трёх переменных  $A(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$  в пространстве  $R_3$  к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса.

5.2. При каких значениях параметра  $\lambda$  квадратичная форма  $A(\mathbf{x}) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$  является (а) положительно определённой и (б) отрицательно определённой?

5.3. Пусть  $A(\mathbf{x})$  - квадратичная форма в пространстве  $R_n$ . Является ли подпространством  $R_n$  множество  $M$  векторов  $\mathbf{x} \in R_n$  таких, что  $A(\mathbf{x}) \geq 0$ ?

Рассмотреть в качестве примера формулу  $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  в трёхмерном пространстве.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

1. Д.В. Беклемишев, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., Наука, 1987, 320 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, абонемент физического факультета, 30 экз.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, Линейная алгебра: учеб., М.: Физматлит, 2008, 280 с. <http://e.lanbook.com/book/2178>
3. Д.В. Хомицкий, А.С. Гаревский, А.В. Тележников, Сборник задач по линейной алгебре, ННГУ, 2006, 51 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Linprob.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/Linprob.pdf)
4. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров, Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, М., Наука, 2003, 496 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 30 экз.
5. А.Г. Курош, Курс высшей алгебры: учеб., Санкт-Петербург, Лань, 2013, 432 с. <https://e.lanbook.com/book/30198>

### б) дополнительная литература:

И.В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, учеб. пособие, Санкт-Петербург, Лань, 2010, 480 с. <https://e.lanbook.com/book/529>

### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы Фундаментальной библиотеки ННГУ <http://www.lib.unn.ru/>.

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ с учетом рекомендаций и ОПОП ВПО по направлению подготовки 09.04.02 «Информационные системы и технологии».

Автор:

Доцент кафедры теоретической физики  
физического факультета, к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Хомицкий Д.В.

Рецензент

д.ф.-м.н., профессор, зав. каф.  
статистической радиофизики и  
мобильных систем связи РФФ \_\_\_\_\_ Мальцев А.А.

Заведующий кафедрой ИТФИ  
д.т.н., профессор \_\_\_\_\_ Фидельман В.Р

Программа одобрена на заседании методической комиссии физического факультета